INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXX. BAND VIERTES HEFT 1961

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 20. Juni 1961

Postverlagsort Berlin

Preis DM 12,—

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zur Ermöglichung rascher Veröffentlichung zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Postfach 3027 · Neuenheimer Landstraße 28/30
Fernsprecher 2 79 01 / Fernschreib-Nr. 04 — 61 723

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3
Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01 / Fernschreib-Nr. 01 — 83 319

Inhalt:

Seite

Heinrich, G., u. *K. Desoyer*, Theorie dreidimensionaler Setzungsvorgänge in Tonschichten. Mit 6 Abbildungen 225

Haberland, G., Einige Auswerteverfahren bei spannungsoptischen Plattenuntersuchungen. Mit 7 Abbildungen 254

Franeck, H.-J., Zur Inversion ebener Spannungszustände. Mit 3 Abbildungen 269

Kaiser, G., Die Scheibe mit elliptischem Kern. Mit 9 Abbildungen 275

Bottema, O., Die Schwingungszahlen linear-elastischer Systeme. Mit 1 Abbildung 288

Leipholz, H., Berichtigung 292

INGENIEUR-ARCHIV

XXX. BAND VIERTES HEFT 1961

Theorie dreidimensionaler Setzungsvorgänge in Tonschichten

Von G. Heinrich und K. Desoyer

1. Einleitung. In der bisherigen Literatur wurden die Konsolidierungs- und Setzungsvorgänge in Tonschichten in der Regel nur eindimensional behandelt[1, 2]. Die wenigen Ansätze zu einer mehrdimensionalen Setzungstheorie versuchen meist, die Porenwasserströmung und die Setzung der Tonschichten voneinander unabhängig zu erfassen[3]. Dies liefert zufolge der Koppelung dieser beiden Vorgänge keine verläßliche Grundlage. In einer Reihe von Arbeiten[4] gibt *Biot* eine Erweiterung der Setzungstheorie auf mehrdimensionale Vorgänge. Da er jedoch nicht von einer Kräfteanalyse für die beiden Komponenten (Festkörper, Flüssigkeit) und den beiden zugehörigen Kontinuitätsgleichungen ausgeht, erscheinen seine Ansätze nicht aus den Grundlagen entwickelt. Er gelangt zu ähnlichen Ausgangsgleichungen wie in der vorliegenden Arbeit, behandelt aber, soweit den Verfassern bekannt ist, damit kein konkretes räumliches Setzungsproblem.

2. Problemstellung, Voraussetzungen und Ausgangsgleichungen. Der Gleichgewichtszustand eines wasserhältigen Bodens wird gestört. Der durch diese Störung hervorgerufene Verlauf der Grundwasserströmung und der Bodenbewegung soll ermittelt werden. Dabei wird vorausgesetzt:

1. die Poren des Bodens sind stets vollständig mit Wasser gefüllt;

2. Wasser und Festkörpermaterial sind inkompressibel;

3. die zwischen Wasser und Boden auftretenden Molekularkräfte werden nur durch Korrektur des Porenvolumens berücksichtigt[5];

4. die Filterwirkung des Festkörpers sei genügend groß, so daß eine „quasistationäre Bewegung", bei der die Trägheitskräfte in der Flüssigkeit und im Festkörper gegenüber den anderen Kräften vernachlässigt werden können, bereits nach einem verschwindend kleinen Zeitintervall nach Beginn der Störung auftritt;

5. es bestehe ein linearer Zusammenhang zwischen dem Vektor der Filtergeschwindigkeit und dem Druckgradienten in der Flüssigkeit im Sinne des *Darcy*-Gesetzes;

6. für nicht zu große zusätzliche Deformationen des Festkörpers bestehe nur eine lineare Abhängigkeit zwischen der Änderung des Deformationstensors und der Änderung des Spannungstensors des Festkörperskelettes, solange die zeitliche Dilatationsänderung ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Die im folgenden verwendeten Begriffe Festkörpergeschwindigkeit (Skelettgeschwindigkeit), Filtergeschwindigkeit, relatives Porenvolumen, Korn-zu-Korn-Kräfte, Druck in der Flüssigkeit usw. sind im Sinne eines Makromodells aufzufassen, das durch Mittelwertbildungen aus den tatsächlich auftretenden, aber im einzelnen nicht bekannten Mikrowerten hervorgeht[6, 7].

Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichungen führen wir folgende Größen ein: n das auf die Volumeinheit des Gemisches (Wasser und Festkörper) bezogene Porenvolumen, $\mathfrak{v}_K$ der Geschwindigkeitsvektor des Festkörpers, $\mathfrak{v}$ der Vektor der Filtergeschwindigkeit relativ zum Festkörper, $d\mathfrak{o}$ der Vektor eines Oberflächenelementes.

---

[1] *Terzaghi-Jelinek*, Theoretische Bodenmechanik, Berlin 1954.
[2] *Terzaghi-Fröhlich*, Theorie der Setzung von Tonschichten, Leipzig und Wien 1936.
[3] *N. Carrillo*, J. Math. Phys. 21 (1942) S. 1.
[4] *M. A. Biot*, J. Appl. Phys. 12 (1941) S. 155 und S. 426; *M. A. Biot* u. *F. H. Clingan*, J. Appl. Phys. 12 (1941) S. 578; *M. A. Biot*, J. Appl. Phys. 26 (1955) S. 182; J. Appl. Mech. 23 1, (1956) S. 91; *M. A. Biot* u. *D. G. Willis*, J. Appl. Mech. 24 (1957) S. 594.
[5] *J. Kozeny*, Hydraulik, S. 381, Wien 1953.
[6] *G. Heinrich* u. *K. Desoyer*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 73.
[7] *G. Heinrich* u. *K. Desoyer*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 81.

Wir denken uns eine raumfeste Hülle 0, die das Volumen V umschließt, gemäß Abb. 1. Das Volumen des im Zeitelement dt durch diese raumfeste Hülle hindurchtretenden Festkörpermaterials ist[1], $\int_0 (1-n)\,\mathfrak{v}_K \cdot d\mathfrak{o}\,dt$, die Abnahme des Festkörpervolumens innerhalb der Hülle ist $-\frac{\partial}{\partial t}\int_V (1-n)\,dV\,dt$. Wegen Voraussetzung 2. gilt daher

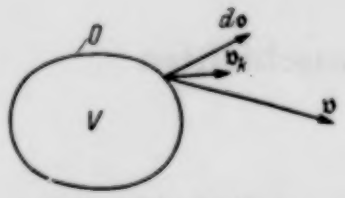

Abb. 1. Zur Ableitung der Kontinuitätsgleichungen.

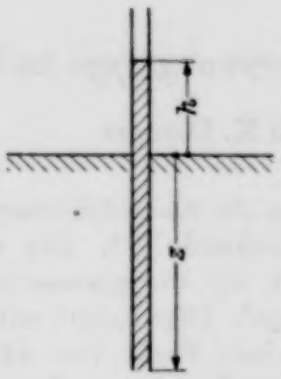

Abb. 2 (rechts). Zur Definition der Standrohrspiegelhöhe h.

$$\int_0 (1-n)\,\mathfrak{v}_K \cdot d\mathfrak{o}\,dt = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V (1-n)\,dV\,dt$$

oder nach Anwendung des *Gauß*schen Satzes

$$\int_V \left\{\nabla \cdot [(1-n)\,\mathfrak{v}_K] - \frac{\partial n}{\partial t}\right\} dV = 0\,.$$

Da diese Gleichung für jedes beliebige Volumen gelten muß, folgt daraus

$$(1-n)\,\nabla \cdot \mathfrak{v}_K = \frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla n) \cdot \mathfrak{v}_K\,. \qquad (1)$$

Um die Kontinuitätsgleichung für die Flüssigkeit zu erhalten, denken wir uns wieder eine raumfeste Hülle (Abb. 1). Würde das Wasser relativ zum Festkörper in Ruhe bleiben, so wäre $n\,\mathfrak{v}_K \cdot d\mathfrak{o}\,dt$ das in der Zeit dt durch das raumfeste Oberflächenelement $d\mathfrak{o}$ transportierte Flüssigkeitsvolumen. Besitzt die Flüssigkeit noch zusätzlich eine Relativbewegung gegen den Festkörper, so vermehrt sich das in der Zeit dt durch $d\mathfrak{o}$ hindurchtretende Flüssigkeitsvolumen um $\mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{o}\,dt$.

Es gilt daher gemäß Voraussetzung 2. die Beziehung

$$\int_0 (n\,\mathfrak{v}_K + \mathfrak{v}) \cdot d\mathfrak{o}\,dt = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V n\,dV\,dt\,.$$

Daraus folgt nach Anwendung des *Gauß*schen Satzes

$$\nabla \cdot (n\,\mathfrak{v}_K + \mathfrak{v}) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0$$

oder

$$n\,\nabla \cdot \mathfrak{v}_K + \nabla \cdot \mathfrak{v} = -\left[\frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla n) \cdot \mathfrak{v}_K\right]. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\nabla \cdot (\mathfrak{v}_K + \mathfrak{v}) = 0\,. \qquad (3)$$

Für die relative Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ gelte das *Darcy*-Gesetz in der Form

$$\mathfrak{v} = -k\,\nabla h\,. \qquad (4)$$

Hierin ist k die Durchlässigkeit und h die Standrohrspiegelhöhe gemäß der Beziehung

$$h = \frac{U}{g} + \frac{p}{\gamma_W}\,. \qquad (5)$$

U ist hierin das Potential der Massenkraft (Schwerkraft), bezogen auf die Masseneinheit, p der statische Druck in der Flüssigkeit, γ_W das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, g die Fallbeschleunigung.

Mit den Zählrichtungen nach Abb. 2 ist $U = -g\,z$ und daher

$$h(x, y, z, t) = \frac{1}{\gamma_W}\,p(x, y, z, t) - z\,. \qquad (5a)$$

Wir denken uns nun durch eine körperfeste Hüllfläche ein endliches Volumen abgegrenzt. Dann gilt die folgende Gleichgewichtsbedingung für den Festkörperanteil[2]

$$\nabla \cdot \mathfrak{S} = \lambda\,\nabla p + \frac{\gamma_K - n\,(\gamma_K - \gamma_W)}{g}\,\nabla U + p\,\nabla\lambda\,. \qquad (6)$$

[1] Der Punkt in Zeilenmitte bedeutet das skalare Produkt, zwei Punkte in Zeilenmitte nebeneinander bedeuten das doppeltskalare Produkt.

[2] Siehe Gl. (9) der in Fußnote 7 von Seite 225 zitierten Arbeit.

Die Hüllfläche sei dabei so gelegt, daß kein Korn des Festkörpermaterials durchschnitten wird. In diesem Fall bedeutet $\mathfrak{S}$ den Spannungsaffinor der Korn-zu-Korn-Kräfte; λ ist für ein makroskopisches Flächenelement der Hüllfläche das Verhältnis des von Flüssigkeit bedeckten Anteils der Fläche zur gesamten Fläche ($\lambda = 1$ für Punktberührung der Körner). γ_K ist das spezifische Gewicht des Kornmaterials. Die obige Schnittführung ist dadurch begründet, daß laut Voraussetzung 2. die Deformation des Festkörpers nur durch Änderung des Porenvolumens verursacht wird und diese nur auf das Wirken der Korn-zu-Korn-Kräfte zurückgeführt werden kann. Würde man auch elastische oder plastische Deformationen der Körner in Betracht ziehen, dann müßte hierfür[1] der durch einen statistischen Schnitt gewonnene Spannungstensor verwendet werden.

Laut Voraussetzung 6 gelte folgender Zusammenhang für die durch die Störung verursachten zusätzlichen substantiellen Änderungen $\mathfrak{D}'$ des Deformationstensors $\mathfrak{D}$ des Festkörperskelettes und $\mathfrak{S}'$ des Spannungstensors $\mathfrak{S}$ der Korn-zu-Korn-Kräfte:

$$\mathfrak{D}' = \alpha\,[(1+\nu)\,\mathfrak{S}' - \nu\,S_1'\,\mathfrak{E}]\,. \tag{7}$$

Darin bedeuten α und ν zwei das Deformationsverhalten des Skelettes charakterisierende positive Konstante[2] (in Analogie zum reziproken Elastizitätsmodul und zur Querzahl), $\mathfrak{E}$ den Einheitsaffinor und S_1'

$$S_1' = \mathfrak{S}' \cdot\cdot \mathfrak{E}\,,$$

die erste Invariante von $\mathfrak{S}'$.

Man könnte Gleichung (7) noch durch Einbeziehung des Affinors der Deformationsgeschwindigkeiten erweitern. Wir wollen hier aber bei den bisher üblicherweise angenommenen physikalischen Zusammenhängen bleiben und diese nur in geometrischer Hinsicht auf dreidimensionale Fälle verallgemeinern.

Aus (7) läßt sich auch die erste Invariante

$$D_1' = \varepsilon' \quad \text{(Volumsdilatation)} \tag{8}$$

des Verzerrungsaffinors $\mathfrak{D}'$ mit S_1' in Zusammenhang bringen. Man erhält

$$\varepsilon' = D_1' = \mathfrak{D}' \cdot\cdot \mathfrak{E} = \alpha\,(1-2\,\nu)\,S_1'\,. \tag{9}$$

In sinngemäßer Erweiterung der bisherigen Ansätze[3] wird angenommen, daß die positiven Beiwerte α und ν nur von sgn $D\varepsilon'/dt$ abhängen, wenn D/dt die substantielle Ableitung bezüglich der Skelettbewegung bedeutet. Da $\nu < \frac{1}{2}$ sein muß, gilt sgn $D\varepsilon'/dt =$ sgn DS_1'/dt. Ist $D\varepsilon'/dt$ negativ (Konsolidierung), dann sollen die Beiwerte mit α_c und ν_c; ist $D\varepsilon'/dt$ positiv (Schwellung) mit α_s und ν_s bezeichnet werden. Es ist anzunehmen, daß die Beiwerte α und ν in geringem Maße auch noch in anderer Weise von den Invarianten des Deformationsaffinors und des Affinors der Deformationsgeschwindigkeiten abhängen werden, doch sollen im folgenden α_c, ν_c, α_s, ν_s als Konstante angesehen werden. Ferner soll angenommen werden, daß der Sprung der Werte α und ν nur bei Vorzeichenänderung von $D\varepsilon'/dt$ auftritt.

Aus (7) folgt mit Verwendung von (9)

$$\mathfrak{S}' = \frac{1}{\alpha\,(1+\nu)}\left(\mathfrak{D}' + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\,\varepsilon'\,\mathfrak{E}\right). \tag{10}$$

Um einen Zusammenhang zwischen der Änderung n' des relativen Porenvolumens n und der Dilatationsänderung ε' herzustellen, denken wir uns ein Volumelement dV, das sich aus den Anteilen dV_K (Kornmaterial) und dV_W (Wasser) zusammensetzt:

$$dV = dV_K + dV_W\,. \tag{11}$$

Nach Definition ist

$$n = \frac{dV_W}{dV}\,. \tag{12}$$

Bedeutet D die substantielle Änderung, dann ist

$$D\varepsilon = \frac{D(dV)}{dV}\,. \tag{13}$$

[1] Siehe Fußnote 7 von Seite 225.
[2] Siehe Gleichung (63).
[3] Siehe Fußnote 1 und 2 von Seite 225.

Wegen der Erhaltung des Kornvolumens folgt aus (11)

$$D(dV) = D(dV_W) \tag{14}$$

und damit aus (12)

$$D\,n \cdot dV + n\,D(dV) = D(dV_W)\,.$$

Daraus ergibt sich bei Verwendung von (13) und (14)

$$\frac{Dn}{1-n} = D\varepsilon\,.$$

Die Integration liefert, wenn zum Anfangswert ε_0 das relative Porenvolumen n_0 gehört,

$$-\ln\left(1 - \frac{n-n_0}{1-n_0}\right) = \varepsilon - \varepsilon_0\,.$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} n - n_0 &= n'\,, \\ \varepsilon - \varepsilon_0 &= \varepsilon'\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

so ergibt sich

$$\ln\left(1 - \frac{n'}{1-n_0}\right) = -\varepsilon'\,. \tag{16}$$

Da die Gleichungen (7) und (9) nur für kleine Änderungen Gültigkeit haben, wird man im Rahmen dieser Größenordnung statt (16) die Näherung

$$\frac{n'}{1-n_0} = \varepsilon' \tag{17}$$

verwenden.

3. Linearisierung der Ausgangsgleichungen. Die Gleichungen (1), (3), (4), (5), (6), (7) und (17) sind die Ausgangsgleichungen des Problems.

Wir gehen nun von einem beliebigen Anfangszustand aus. Die zugehörigen Größen seien mit dem Index 0 bezeichnet. Zur Zeit $t = 0$ werde eine „kleine Störung" eingeleitet, die in dem Sinn als klein anzusehen ist, daß die Produkte der Störgrößen gegenüber diesen selbst vernachlässigt werden können. Die Störgrößen sollen durch einen Strich gekennzeichnet werden. Auf Grund der obigen Annahme können nun die Ausgangsgleichungen linearisiert werden. Die Gleichungen (1), (3), (4), (5) und (6) gehen dann über in

$$-n'\,(\nabla \cdot \mathfrak{v}_{K_0}) + (1-n_0)\,(\nabla \cdot \mathfrak{v}'_K) = \frac{\partial n'}{\partial t} + (\nabla n_0 \cdot \mathfrak{v}'_K) + (\nabla n' \cdot \mathfrak{v}_{K_0})\,, \tag{1a}$$

$$\nabla \cdot (\mathfrak{v}_K + \mathfrak{v}') = 0\,, \tag{3a}$$

$$\mathfrak{v}' = -(k_0 \nabla h' + k' \nabla h_0)\,, \tag{4a}$$

$$h' = \frac{p'}{\gamma_W}\,, \tag{5a}$$

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}' = \lambda_0 \nabla p' + \lambda' \nabla p_0 - \frac{n'(\gamma_K - \gamma_W)}{g} \nabla U + p' \nabla \lambda_0 + p_0 \nabla \lambda'\,. \tag{6a}$$

Dazu kommt noch die unveränderte Gleichung (7).

Ist der Ausgangszustand ein Gleichgewichtszustand ohne Grundwasserströmung, sind k_0, n_0 und λ_0 nicht vom Ort abhängig und ist überdies λ' vernachlässigbar klein[1] gegen λ_0, dann vereinfachen sich die Gleichungen (1a), (4a) und (6a) und man erhält das folgende Gleichungssystem:

$$(1-n_0)\,(\nabla \cdot \mathfrak{v}'_K) = \frac{\partial n'}{\partial t}\,, \tag{1b}$$

$$\nabla \cdot (\mathfrak{v}'_K + \mathfrak{v}') = 0\,, \tag{3b}$$

$$\mathfrak{v}' = -k_0 \nabla h'\,, \tag{4b}$$

$$h' = \frac{p'}{\gamma_W}\,, \tag{5b}$$

[1] Diese Annahme ist dadurch gerechtfertigt, daß bei Tonen nahezu Punktberührung der Körner vorhanden ist, so daß λ nicht wesentlich vom Wert 1 abweichen kann.

$$\nabla \cdot \mathfrak{S}' = \lambda_0 \nabla p' - \frac{n' (\gamma_K - \gamma_W)}{g} \nabla U \,, \tag{6b}$$

$$\mathfrak{D}' = \alpha \left[(1 + \nu)\, \mathfrak{S}' - \nu\, S_1' \mathfrak{E} \right], \tag{7b}$$

$$\frac{n'}{1 - n_0} = \varepsilon' \,. \tag{17b}$$

Dies sind 16 skalare Gleichungen, die zusammen mit vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen das Problem vollständig bestimmen. Man kann nämlich die sechs Komponenten von $\mathfrak{D}'$ durch die drei Verschiebungskomponenten ξ', η', ζ' des Festkörpers in bezug auf ein raumfestes Koordinatensystem (x, y, z) ausdrücken. (*Lagrange*sche Darstellung.) Die Bewegung der Flüssigkeit relativ zum Festkörper kann dann in *Euler*scher Darstellung durch die Komponenten v_x', v_y', v_z' der Filtergeschwindigkeit beschrieben werden, Als die 16 unbekannten Funktionen können also die 10 Größen $\xi', \eta', \zeta', v_x', v_y', v_z', n', \varepsilon', p', h'$ und die sechs Komponenten von $\mathfrak{S}'$ angesehen werden.

4. Umformungen des gewonnenen Gleichungssystems. Es soll zunächst eine Differentialgleichung für ε' abgeleitet werden. Aus (7b) folgt

$$\nabla \cdot \mathfrak{D}' = \alpha (1 + \nu) \nabla \cdot \mathfrak{S}' - \alpha \nu \nabla S_1'$$

oder mit Verwendung von (6b), (9) und (17b)

$$\nabla \cdot \mathfrak{D}' = \alpha (1 + \nu) \left[\lambda_0 \nabla p' - \frac{\gamma_K - \gamma_W}{g} (1 - n_0)\, \varepsilon' \nabla U \right] - \frac{\nu}{1 - 2\nu} \nabla \varepsilon' \,. \tag{18}$$

Daraus erhält man mit $\Delta U = 0$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathfrak{D}') = \alpha (1 + \nu) \left[\lambda_0 \Delta p' - \frac{\gamma_K - \gamma_W}{g} (1 - n_0) (\nabla U) \cdot (\nabla \varepsilon') \right] - \frac{\nu}{1 - 2\nu} \Delta \varepsilon' \,. \tag{19}$$

Bedeutet $\mathfrak{u}'$ den Verschiebungsvektor des Festkörpers an einer Stelle mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$, dann gilt[1]

$$\mathfrak{D}' (\mathfrak{r} + \mathfrak{u}') = \frac{1}{2} (\nabla, \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}', \nabla) \,. \tag{20}$$

Weiter ist

$$\mathfrak{D}' (\mathfrak{r} + \mathfrak{u}') = \mathfrak{D}'(\mathfrak{r}) + \mathfrak{u}' \cdot (\nabla, \mathfrak{D}') + \cdots .$$

Wir setzen nun wie üblich im Sinne einer Theorie erster Ordnung voraus, daß die Verschiebungen klein sind gegen die Abmessungen des Bereichs. Dann kann man näherungsweise $\mathfrak{D}' (\mathfrak{r} + \mathfrak{u}')$ durch $\mathfrak{D}'(\mathfrak{r})$ ersetzen und alle Beziehungen durch die ursprünglichen unabhängigen Variablen ausdrücken. Die substantielle Ableitung in bezug auf die Skelettbewegung kann bei dieser Näherung durch die partielle Ableitung nach der Zeit ersetzt werden. Dann geht (20) über in

$$\mathfrak{D}'(\mathfrak{r}) = \frac{1}{2} (\nabla, \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}', \nabla) \,, \tag{21}$$

und daraus folgt

$$\nabla \cdot \mathfrak{D}' = \frac{1}{2} \left[\Delta \mathfrak{u}' + \nabla (\nabla \cdot \mathfrak{u}') \right] . \tag{21a}$$

Mit

$$\nabla \cdot \mathfrak{u}' = \varepsilon' \tag{22}$$

kommt

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathfrak{D}') = \Delta \varepsilon' \,.$$

Damit und mit (5b) erhält man aus (19)

$$\Delta \varepsilon' = \frac{\alpha (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{1 - \nu} \left[\lambda_0 \gamma_W \Delta h' - \frac{\gamma_K - \gamma_W}{g} (1 - n_0) (\nabla U) \cdot (\nabla \varepsilon') \right] . \tag{23}$$

Aus (4b), (3b), (1b) und (17b) folgt

$$\Delta h' = \frac{1}{k_0} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} \,. \tag{24}$$

Aus (23) ergibt sich mit (24) schließlich

$$\Delta \varepsilon' + \varkappa_1 (\nabla U) \cdot (\nabla \varepsilon') = \varkappa \frac{\partial \varepsilon'}{\partial t} \,, \tag{25}$$

[1] Komma bedeutet das dyadische Produkt.

mit den Abkürzungen

$$\varkappa_1 = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\,\frac{(1-n_0)\,(\gamma'_K-\gamma'_W)}{g}\,, \tag{26}$$

$$\varkappa = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\,\frac{\lambda_0\,\gamma'_W}{k_0}\,. \tag{27}$$

Wegen (9) gilt auch

$$\Delta S'_1 + \varkappa_1\,(\nabla U)\cdot(\nabla S'_1) = \varkappa\,\frac{\partial S'_1}{\partial t}\,. \tag{28}$$

Um eine Differentialgleichung für h' allein zu bekommen, kann man Gleichung (25) partiell nach der Zeit differentiieren und erhält dann mit (24)

$$\Delta\,\Delta h' + \varkappa_1\,(\nabla U)\cdot[\nabla(\Delta h')] = \varkappa\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\Delta h')\,. \tag{29}$$

Die Größe $\Delta h'$ gehorcht demnach derselben Differentialgleichung wie ε'.

Zu einer Beziehung zwischen $\mathfrak{u}'$, ε' und h' gelangt man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (18) und (21). Mit (22) und (5b) erhält man bei Verwendung der Abkürzungen (26) und (27)

$$\Delta\mathfrak{u}' = -\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\left[\frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\nabla\varepsilon' + \varkappa_1\,\varepsilon'\,\nabla U - k_0\,\varkappa\,\nabla h'\right]. \tag{30}$$

Man wird also zweckmäßigerweise folgenden Rechnungsgang einhalten: man löst zunächst Gleichung (25) für ε' mit den dem speziellen Problem entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen. Diese bestimmen im allgemeinen ε' nur bis auf eine noch zu ermittelnde Funktion. Daraufhin löst man Gleichung (24) für h' mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen, wobei eine weitere noch unbekannte Funktion auftritt. Mit den gewonnenen Darstellungen für ε' und h' geht man nun in Gleichung (30) ein und erhält Darstellungen für die Komponenten von $\mathfrak{u}'$. Damit gewinnt man gemäß (20) und (7b) auch Darstellungen für alle Verzerrungs- und Spannungsgrößen. Die damit noch zu erfüllenden Randbedingungen und (22) reichen hin, um die noch offen gebliebenen Funktionen zu ermitteln.

5. Anwendungen. 1. Einachsiger Verzerrungszustand. Ein einachsiger Verzerrungszustand liegt vor, wenn ein Grundwasserträger, der von unverschieblichen, undurchlässigen vertikalen Wänden eingeschlossen und von einer unverschieblichen, gleichmäßig durchlässigen oder undurchlässigen horizontalen Schicht nach unten begrenzt ist, an seiner Oberfläche durch gleichmäßigen Druck belastet wird. Hierbei muß an den vertikalen Begrenzungswänden Schubspannungsfreiheit vorausgesetzt werden. Es soll der Fall eines einachsigen Verzerrungszustandes bei undurchlässiger, unverschieblicher unterer horizontaler Begrenzung (Abb. 3) behandelt werden.

Zur Festlegung der Anfangsbedingungen wird vorausgesetzt, daß die Last P zur Zeit $t = 0$ vermittels eines durchlässigen, starren Stempels plötzlich, aber stoßfrei aufgebacht wird. Unmittelbar nach der Lastaufbringung sind allerdings die Beschleunigungsterme nicht vernachlässigbar, jedoch wird sich laut Voraussetzung 4. bereits nach sehr kurzer Zeit ein quasistationärer Bewegungszustand einstellen, so daß diese „Anlaufzeit" vernachlässigbar ist. Da es sich um einen Konsolidierungsvorgang handelt, wären die Materialkonstanten mit dem Index c zu versehen. Er wird jedoch im folgenden weggelassen.

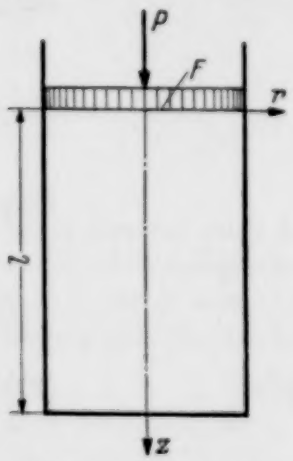

Abb. 3. Schema für den einachsigen Verzerrungszustand.

Für den einachsigen Verzerrungszustand lautet (25)

$$\frac{\partial^2\varepsilon'}{\partial z^2} - \varkappa_1 g\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z} = \varkappa\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t} \tag{31}$$

und (24)

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} = \frac{1}{k_0}\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t}\,. \tag{32}$$

Aus (30) wird

$$\frac{\partial^2\zeta'}{\partial z^2} = -\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\left[\frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z} - \varkappa_1\,g\,\varepsilon' - k_0\,\varkappa\,\frac{\partial h'}{\partial z}\right], \tag{33}$$

worin $\zeta'(z, t)$ die Verschiebung des Festkörpers in der z-Richtung bedeutet. Gleichung (22) nimmt die Form an

$$\frac{\partial\zeta'}{\partial z} = \varepsilon'\,. \tag{34}$$

Zur Lösung von (31) führen wir die *Laplace*-Transformierte

$$E = \mathfrak{L}\{\varepsilon'\} = \int_0^\infty \varepsilon' \, e^{-s\,t} \, dt \tag{35}$$

ein. Zur Zeit $t = 0+$ ist nach Voraussetzung 4. die quasistationäre Grundwasserbewegung bereits vorhanden, die Porenvolumina für $z > 0$ haben sich jedoch noch nicht geändert. Es gilt demnach die Anfangsbedingung

$$t = 0+, \quad z > 0, \ldots \varepsilon' = 0\,. \tag{35a}$$

Daher ist

$$\mathfrak{L}\left\{\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t}\right\} = s\,E\,. \tag{36}$$

Somit lautet (31) im Unterraum

$$\frac{d^2E}{dz^2} - \varkappa_1 g \frac{dE}{dz} - \varkappa\, s\, E = 0\,. \tag{37}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\mu^2 - \varkappa_1 g\, \mu - \varkappa\, s = 0 \tag{38}$$

hat die Wurzeln

$$\mu_{1,2} = \beta \pm \omega \tag{38a}$$

mit

$$\beta = \frac{\varkappa_1 g}{2} \tag{38b}$$

und

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{\varkappa_1 g}{2}\right)^2 + \varkappa\, s}\,. \tag{38c}$$

Die allgemeine Lösung von (37) ist daher

$$E = C_1\, e^{(\beta+\omega)\,z} + C_2\, e^{(\beta-\omega)\,z}\,. \tag{39}$$

Mit

$$H = \mathfrak{L}\{h'\} = \int_0^\infty h'\, e^{-s\,t}\, dt \tag{40}$$

ergibt sich aus (32) bei Verwendung von (36) und (39)

$$\frac{d^2H}{dz^2} = \frac{s}{k_0}\left[C_1\, e^{(\beta+\omega)\,z} + C_2\, e^{(\beta-\omega)\,z}\right].$$

Daraus folgt

$$H = \frac{s}{k_0}\left[\frac{C_1}{(\beta+\omega)^2}\, e^{(\beta+\omega)\,z} + \frac{C_2}{(\beta-\omega)^2}\, e^{(\beta-\omega)\,z} + C_3\, z + C_4\right]. \tag{41}$$

Es gelten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} z = 0 \ldots H &= 0\,, \\ z = l \ldots \frac{dH}{dz} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Damit wird aus (41)

$$H = \frac{s}{k_0}\left\{\frac{C_1}{(\beta+\omega)^2}\left[e^{(\beta+\omega)\,z} - 1\right] + \frac{C_2}{(\beta-\omega)^2}\left[e^{(\beta-\omega)\,z} - 1\right] - \left[\frac{C_1}{\beta+\omega}\, e^{(\beta+\omega)\,l} + \frac{C_2}{\beta-\omega}\, e^{(\beta-\omega)\,l}\right] z\right\}. \tag{43}$$

Mit

$$Z = \mathfrak{L}\{\zeta'\} = \int_0^\infty \zeta'\, e^{-s\,t}\, dt \tag{44}$$

ergibt sich aus (33)

$$\frac{d^2Z}{dz^2} = -\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\left[\frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\frac{dE}{dz} - 2\,\beta\, E - k_0\,\varkappa\,\frac{dH}{dz}\right].$$

Daraus erhält man mit (39), (43), (38), (38a, b, c)

$$\frac{dZ}{dz} = C_1 e^{(\beta+\omega)z} + C_2 e^{(\beta-\omega)z} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \varkappa s \left\{ \left[\frac{C_1}{\beta+\omega} e^{(\beta+\omega)l} + \frac{C_2}{\beta-\omega} e^{(\beta-\omega)l} \right] z + \frac{C_1}{(\beta+\omega)^2} + \frac{C_2}{(\beta-\omega)^2} + C_5 \right\}. \tag{45}$$

Aus (34) folgt andererseits mit (39)

$$\frac{dZ}{dz} = E = C_1 e^{(\beta+\omega)z} + C_2 e^{(\beta-\omega)z}. \tag{46}$$

Durch Vergleich von (45) und (46) erhält man

$$\frac{C_1}{\beta+\omega} e^{(\beta+\omega)l} + \frac{C_2}{\beta-\omega} e^{(\beta-\omega)l} = 0 \tag{47}$$

und

$$\frac{C_1}{(\beta+\omega)^2} + \frac{C_2}{(\beta-\omega)^2} + C_5 = 0. \tag{48}$$

Aus (46) folgt durch Integration

$$Z = \frac{C_1}{\beta+\omega} e^{(\beta+\omega)z} + \frac{C_2}{\beta-\omega} e^{(\beta-\omega)z} + C_6.$$

Wegen der Randbedingung $z = l \ldots Z = 0$ und (47) erhält man schließlich

$$Z = -\frac{2C_1}{\beta+\omega} e^{\beta z + \omega l} \operatorname{Sin}[\omega(l-z)]. \tag{49}$$

Aus (10) folgen wegen $\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = 0$ und $\varepsilon'_{zz} = \varepsilon'$ die Beziehungen

$$\sigma'_{xx} = \sigma'_{yy} = \frac{\nu}{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon' \tag{50}$$

und

$$\sigma'_{zz} = \frac{1-\nu}{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon'. \tag{51}$$

Ist

$$q = \frac{P}{F} \tag{52}$$

die Belastung des Stempels je Flächeneinheit, dann gilt wegen (51)

$$(\sigma'_{zz})_{z=0} = -q = \frac{1-\nu}{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon')_{z=0}. \tag{53}$$

Gleichung (53) lautet im Unterraum

$$E_{z=0} = -\frac{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{q}{s}. \tag{54}$$

Damit ergibt sich aus (46) und (47)

$$C_1 = -\frac{q}{2s} \frac{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)(\beta+\omega) e^{-\omega l}}{(1-\nu)(\omega \operatorname{Cof} \omega l - \beta \operatorname{Sin} \omega l)}$$

und damit aus (49)

$$Z = \frac{q}{s} \frac{\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{e^{\beta z} \operatorname{Sin}[\omega(l-z)]}{\omega \operatorname{Cof} \omega l - \beta \operatorname{Sin} \omega l}. \tag{55}$$

Die Rücktransformation erhält bei Beachtung von (38b) und (38c) die Form

$$\zeta'(z,t) = \frac{q\varkappa(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} e^{\beta z} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{s} \frac{\operatorname{Sin}[\sqrt{\beta^2 + \varkappa s}(l-z)]}{\sqrt{\beta^2+\varkappa s} \operatorname{Cof}(\sqrt{\beta^2+\varkappa s}\, l) - \beta \operatorname{Sin}(\sqrt{\beta^2+\varkappa s}\, l)} ds. \tag{56}$$

Durch Einführen der dimensionslosen Größen

$$z^* = \frac{z}{l}, \qquad t^* = \frac{t}{\varkappa l^2}, \qquad \zeta^* = \frac{\zeta'}{l} \tag{57}$$

und der Substitution $\beta^2 + \varkappa s = s_1$ erhält man nach Weglassung des Index 1

$$\zeta^* = \frac{q\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu}\, e^{\beta l z^* - \beta^2 l^2}\, \frac{1}{2\pi i} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{e^{s t^*}\, \mathfrak{Sin}\left[\sqrt{s}\,(1-z^*)\right]}{\left(\sqrt{s}\,\mathfrak{Cos}\,\sqrt{s} - \beta l\,\mathfrak{Sin}\,\sqrt{s}\right)(s-\beta^2 l^2)}\, ds\,. \tag{58}$$

Man erkennt aus (58), daß die Abhängigkeit von $\sqrt{s}$ nur scheinbar ist. Es kann daher die Lösung mittels des Residuensatzes gefunden werden. Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch

$$s = \beta^2 l^2 \tag{59}$$

und durch die transzendente Gleichung

$$\mathfrak{Tg}\sqrt{s} = \frac{\sqrt{s}}{\beta l}\,. \tag{60}$$

Gleichung (60) besitzt nur dann für $\sqrt{s}$ eine von Null verschiedene reelle Lösung, wenn

$$\frac{1}{\beta l} < \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

d. h. nach (38b), wenn

$$\varkappa_1 g\, l > 2\sqrt{2}\,. \tag{61}$$

Zur Abschätzung der Größenordnung von $\varkappa_1 g$ gehen wir von (31) aus und betrachten den Endzustand ($t = \infty$) bei Vernachlässigung des Auftriebsgliedes

$$\varkappa_1 g\, \frac{\partial \varepsilon'}{\partial z}\,.$$

Da nunmehr in jedem Querschnitt $(\sigma'_{zz})_{t=\infty} = -q = \text{konst.}$ ist, ist $(\varepsilon')_{t=\infty}$ im ganzen Bereich konstant. Es gilt daher nach (34)

$$(\zeta')_{t=\infty} = z(\varepsilon')_{t=\infty} + C\,.$$

Wegen $z = l \ldots (\zeta')_{t=\infty} = 0$ folgt

$$(\zeta')_{t=\infty} = -(l-z)\,(\varepsilon')_{t=\infty}$$

und an der Stelle $z = 0$

$$(\zeta')_{\substack{t=\infty \\ z=0}} = -l\,(\varepsilon')_{t=\infty}\,.$$

Daher ist mit (53)

$$(\zeta^*)_{\substack{t=\infty \\ z=0}} = -(\varepsilon')_{t=\infty} = \frac{q\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu} = (1-n_0)\,a_{ve}\,q\,. \tag{62}$$

Hierin bedeutet a_{ve} den von *Terzaghi*[1] eingeführten Verdichtungsbeiwert. Es ist also

$$a_{ve} = \frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}{(1-\nu)\,(1-n_0)}\,. \tag{63}$$

Demnach folgt aus (26) und (63)

$$\varkappa_1 g = a_{ve}\,(1-n_0)^2\,(\gamma_K - \gamma_W)\,. \tag{64}$$

Für blauen sandigen Schluff-Ton (Wien) erhält man die Werte[2]

$$n_0 = 0{,}6\,, \qquad a_{ve} = 3{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{cm^2/kp}\,,$$
$$\gamma_K = 2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kp/cm^3}\,, \qquad \gamma_W = 10^{-3}\ \mathrm{kp/cm^3}\,.$$

Damit gibt (63)

$$\varkappa_1 g = 1{,}84 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{cm^{-1}}\,.$$

Die Ungleichung (31) ist in diesem Fall nur für $l > 1{,}54$ km erfüllt. Wenn, wie wir voraussetzen wollen, die Dicke der Tonschicht geringer ist als $2\sqrt{2}\,/\,\varkappa_1 g$, besitzt Gleichung (60) für $\sqrt{s}$ keine

[1] Siehe S. 270 des Buches von *Terzaghi-Jelinek*, Fußnote 1 von Seite 225.
[2] *G. Heinrich*, Wasserkraft u. Wasserwirtschaft 33 (1938) S. 5, speziell die Tabelle von S. 9.

von Null verschiedene reelle Lösung; hingegen existieren unendlich viele imaginäre Lösungen. Wir setzen

$$\sqrt{s_j} = i\,\sigma_j\,, \tag{65}$$

worin σ_j positive Zahlen bedeuten. Aus (60) und (65) folgt

$$\operatorname{tg}\sigma_j = \frac{\sigma_i}{\beta\,l} \qquad (j = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)\,. \tag{66}$$

Die zugehörigen Werte s_j sind aus (65)

$$s_j = -\sigma_j^2 \qquad (j = 0, 1, 2, 3\ldots)\,. \tag{67}$$

Mit Hilfe des Residuensatzes findet man schließlich aus (58) nach einfachen Umformungen

$$\zeta^* = \frac{q\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\left\{\frac{e^{2\,\beta\,l} - e^{2\,\beta\,l\,z^*}}{2\,\beta\,l} - 2\,e^{\beta\,l\,z^*}\sum_{j=0,1,2\ldots}^{\infty}\frac{\sigma_j^2\,e^{-(\sigma_j^2+\beta^2\,l^2)\,t^*}\sin\left[\sigma_j\,(1-z^*)\right]}{\left(\sigma_j^2+\beta^2\,l^2\right)\left(\sigma_j^2-\beta\,l+\beta^2\,l^2\right)\sin\sigma_j}\right\}. \tag{68}$$

Ist

$$\beta\,l = \frac{\varkappa_1\,g\,l}{2} \ll 1\,, \tag{69}$$

dann erhält man aus (68) durch den Grenzübergang $\beta \to 0$ den Ausdruck

$$\zeta^* = \frac{q\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\left\{(1-z^*) - \frac{8}{\pi^2}\sum_{j=0,1,2\ldots}^{\infty}\frac{(-1)^j\,e^{-(2\,j+1)^2\,\frac{\pi^2}{4}\,t^*}}{(2\,j+1)^2}\sin\left[(2\,j+1)\,\frac{\pi}{2}\,(1-z^*)\right]\right\} \tag{70}$$

und daraus die Setzung an der Oberfläche ($z^* = 0$)

$$(\zeta^*)_{z^*=0} = \frac{q\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\left[1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{j=0,1,2\ldots}^{\infty}\frac{e^{-(2\,j+1)^2\,\frac{\pi^2}{4}\,t^*}}{(2\,j+1)^2}\right]. \tag{71}$$

Diese Gleichung stimmt mit *Terzaghi-Fröhlich*[1] überein.

Fordert man wegen der Ungleichung (69) z. B., daß $\beta\,l < 0{,}05$ sein soll, so erhält man für die obigen Zahlenwerte die Forderung $l < 55$ m. Auf diese Weise kann man den Fehler abschätzen, den man durch Vernachlässigung des Auftriebsgliedes begeht.

Es soll nun noch gezeigt werden, daß sich beim einachsigen Verzerrungszustand auch für σ'_{zz} eine Differentialgleichung finden läßt und daß sich die Differentialgleichung (29) für h' durch eine zweiter Ordnung ersetzen läßt. Aus (31) folgt mit (51)

$$\frac{\partial^2\sigma'_{zz}}{\partial z^2} - \varkappa_1\,g\,\frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial z} = \varkappa\,\frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial t}\,. \tag{72}$$

Aus (6b) mit (17b) erhält man zunächst

$$\frac{\partial\sigma'_{zz}}{\partial z} = \lambda_0\,\frac{\partial p'}{\partial z} + (1-n_0)\,(\gamma_K - \gamma_W)\,\varepsilon'\,. \tag{73}$$

Wendet man darauf den Operator

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \varkappa_1\,g\,\frac{\partial}{\partial z} - \varkappa\,\frac{\partial}{\partial t}$$

an, so folgt wegen (31) und (51)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - \varkappa_1\,g\,\frac{\partial p'}{\partial z} - \varkappa\,\frac{\partial p'}{\partial t}\right) = 0 \tag{74}$$

bzw. wegen (5b) auch

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} - \varkappa_1\,g\,\frac{\partial h'}{\partial z} - \varkappa\,\frac{\partial h'}{\partial t}\right) = 0 \tag{75}$$

oder

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} - \varkappa_1\,g\,\frac{\partial h'}{\partial z} - \varkappa\,\frac{\partial h'}{\partial t} = f(t)\,, \tag{76}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 225.

worin $f(t)$ eine unbekannte Funktion der Zeit ist. Man überlegt sich leicht, daß $f(t)$ auch für den Fall einer zeitlich konstanten Last tatsächlich eine Funktion der Zeit sein muß: für eine von der Zeit abhängige Belastung $q(t)$ je Flächeneinheit gilt laut (35)

$$(\sigma'_{zz})_{z=0} = \frac{1-\nu}{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,(\varepsilon')_{z=0} = -\,q(t) \qquad \text{für } t>0\,. \tag{77}$$

Demnach ist wegen (32)

$$\left(\frac{\partial^2 h'}{\partial z^2}\right)_{z=0} = -\,\frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{k_0\,(1-\nu)}\,\frac{dq(t)}{dt}\,.$$

Wegen der Randbedingung $(h')_{z=0}=0$ für $t>0$ gilt $\left(\frac{\partial h'}{\partial t}\right)_{z=0}=0$ für $t>0$. Demnach folgt aus (76)

$$-\,\frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{k_0\,(1-\nu)}\,\frac{dq(t)}{dt} - \varkappa_1\,g\left(\frac{\partial h'}{\partial z}\right)_{z=0} = f(t)\,. \tag{78}$$

Mit Benützung von (4b) ergibt sich daraus

$$f(t) = \frac{\varkappa_1\,g}{k_0}\,(v_z)_{z=0} - \frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{k_0\,(1-\nu)}\,\frac{dq(t)}{dt}\,. \tag{79}$$

Aus Gleichung (79) erkennt man, daß $f(t)$ im allgemeinen tatsächlich von der Zeit abhängt; $f(t)$ verschwindet dann, wenn q zeitlich konstant ist und wenn überdies auf eine Berücksichtigung des Termes mit $\varkappa_1$ (Auftriebsglied) verzichtet wird. In diesem speziellen Fall gilt

$$\frac{\partial^2 h'}{\partial z^2} - \varkappa\,\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \tag{80a}$$

oder wegen (5b)

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - \varkappa\,\frac{\partial p'}{\partial t} = 0\,. \tag{80b}$$

Dies entspricht der in den Lehrbüchern über Bodenmechanik bisher ausschließlich verwendeten Ausgangsgleichung für die Berechnung von Setzungsvorgängen.

Verschiedene Autoren[1] versuchen, diese Gleichung für den räumlichen Fall in der Form

$$\Delta h' - \varkappa\,\frac{\partial h'}{\partial t} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta p' - \varkappa\,\frac{\partial p'}{\partial t} = 0 \tag{81a,b}$$

zu verwenden. Wie (29) zeigt, ist dies auch bei Vernachlässigung des Auftriebstermes unzulässig. Daß (81a) und (81b) auch für praktisch wichtige Spezialfälle nicht erfüllt sind, kann leicht an Hand von Gleichung (160) festgestellt werden.

2. Setzungen von Tonschichten großer Mächtigkeit bei zylindersymmetrischer Lastverteilung. Ein Grundwasserträger, der als unendlicher Halbraum angesehen wird, werde an seiner horizontalen, überall durchlässigen Oberfläche zur Zeit $t=0$ beginnend, durch eine stoßfrei aufgebrachte zylindersymmetrische Druckverteilung $q(r,t)$ belastet (Abb. 4). Dabei wird $\partial q(r,t)/\partial t \geqq 0$ vorausgesetzt. Es soll der zeitliche Verlauf des durch die Belastung eingeleiteten Konsolidierungsvorganges ermittelt werden. Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, spielen die von der Schwerkraft herrührenden Terme in den Gleichungen (25), (28), (29) und (30) schon für den einachsigen Fall nur eine untergeordnete Rolle. Für den zylindersymmetrischen Fall, bei dem die Störgrößen mit der Entfernung von der Belastungsstelle abklingen, sollen diese Terme zunächst vernachlässigt werden.

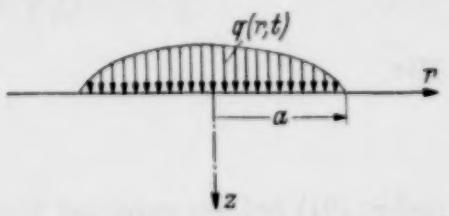

Abb. 4. Zylindersymmetrische Belastung des Halbraumes.

Die Gleichungen (25) und (30) lauten dann

$$\Delta\varepsilon' = \varkappa\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial t} \tag{82}$$

und

$$\Delta u' = -\,\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\left[\frac{1}{2\,(1-\nu)}\,\nabla\varepsilon' - k_0\,\varkappa\,\nabla h'\right] \tag{83}$$

[1] Siehe Fußnote 3 von Seite 225.

mit

$$\nabla = \mathfrak{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathfrak{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{84}$$

und

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{85}$$

worin $\mathfrak{e}_r$, $\mathfrak{e}_\varphi$, $\mathfrak{e}_z$ die drei Einheitsvektoren in den Richtungen r, φ, z (Zylinderkoordinaten) bedeuten.

Es gelten folgende Anfangs- und Randbedingungen:

$$\text{1. für } t = 0+, \qquad z > 0 \ldots \varepsilon' = 0, \tag{86}$$

$$\text{2. für } t \geqq 0, \qquad z = 0 \ldots h' = 0, \tag{87}$$

$$\text{3. für } t \geqq 0, \qquad z = 0 \ldots \sigma'_{rz} = 0, \tag{88}$$

$$\text{4. für } t \geqq 0, \qquad z = 0 \ldots \sigma'_{zz} = -q(r,t). \tag{89}$$

Außerdem muß gefordert werden, daß alle Störgrößen für $z \to \infty$ verschwinden.

Zur Lösung von (82) führen wir

$$E = \mathfrak{L}\{\varepsilon'\} = \int_0^\infty e^{-st} \varepsilon' \, dt \tag{90}$$

als *Laplace*-Transformierte von ε' ein. Wegen der Bedingung (86) folgt damit aus (82)

$$\Delta E = \varkappa s E. \tag{91}$$

Zur Lösung von (91) benutzen wir die *Hankel*-Transformation. Für eine Funktion $f(r,z)$ lautet die *Hankel*-Transformierte (siehe z. B. [1])

$$\mathfrak{H}_\nu\{f(r,z)\} = \int_0^\infty f(r,z)\, r\, J_\nu(r\,p)\, dr, \tag{92}$$

wobei J_ν die Besselfunktion ν-ter Ordnung bedeutet. Die Rücktransformation lautet

$$f(r,z) = \int_0^\infty \mathfrak{H}_\nu\{f(r,z)\}\, p\, J_\nu(r\,p)\, dp. \tag{93}$$

Außerdem gelten die Beziehungen

$$\mathfrak{H}_0\{\Delta f(r,z)\} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2\right) \mathfrak{H}_0\{f(r,z)\} \tag{94}$$

und

$$\mathfrak{H}_1\left\{\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) f(r,z)\right\} = \left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2\right) \mathfrak{H}_1\{f(r,z)\}. \tag{95}$$

Mit

$$\mathfrak{H}_0\{E\} = \int_0^\infty E\, r\, J_0(r\,p)\, dp$$

liefert (91) bei Verwendung von (94)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2 - \varkappa s\right) \mathfrak{H}_0\{E\} = 0. \tag{96}$$

Die allgemeine Lösung von (96), die für $z \to \infty$ verschwindet, ist

$$\mathfrak{H}_0\{E\} = A(p,s)\, e^{-\sqrt{p^2 + \varkappa s}\, z},$$

worin $A(p,s)$ eine willkürliche Funktion bedeutet. Die Rücktransformation nach (93) liefert

$$E = \int_0^\infty A(p,s)\, e^{-\sqrt{p^2 + \varkappa s}\, z}\, p\, J_0(r\,p)\, dp. \tag{97}$$

---

[1] *C. J. Tranter*, Integral Transforms in Mathematical Physics, S. 2 und 12, New York 1959.

Die Elimination von $\partial\varepsilon'/\partial t$ aus den Gleichungen (24) und (82) liefert mit (27)

$$\frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\,\lambda_0\,\gamma_w\,\Delta h' = \Delta\varepsilon'\,. \tag{98}$$

Setzt man

$$\mathfrak{Q}\left\{\frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{1-\nu}\,\lambda_0\,\gamma_W\,h'\right\} = H\,, \tag{99}$$

so folgt aus (98)

$$\Delta(H-E) = 0\,. \tag{100}$$

Nach (94) ergibt sich mit

$$\mathfrak{H}_0\{H\} = \int_0^\infty H\,r\,J_0(r\,p)\,dr$$

aus (100)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2\right)\mathfrak{H}_0\{H-E\} = 0\,.$$

Somit ist

$$\mathfrak{H}_0\{H-E\} = B(p,s)\,e^{-p\,z}$$

bzw. nach der Rücktransformation gemäß (93) bei Verwendung von (97)

$$H = \int_0^\infty A(p,s)\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa\,s}\,z}\,p\,J_0(r\,p)\,dp + \int_0^\infty B(p,s)\,e^{-p\,z}\,p\,J_0(r\,p)\,dp\,. \tag{101}$$

Hierin ist $B(p,s)$ eine weitere willkürliche Funktion. Aus der Bedingung (87) folgt

$$A(p,s) + B(p,s) = 0$$

und damit

$$H = \int_0^\infty A(p,s)\left[e^{-\sqrt{p^2+\varkappa\,s}\,z} - e^{-p\,z}\right]\,p\,J_0(r\,p)\,dp\,. \tag{102}$$

Bedeuten u bzw. w die Verschiebungen des Festkörpers in radialer bzw. vertikaler Richtung

$$\mathfrak{u}' = u\,\mathfrak{e}_r + w\,\mathfrak{e}_z\,, \tag{103}$$

dann liefert (85) bei Beachtung von (27)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w = -\,\frac{1}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial z} + 2\,\alpha\,(1+\nu)\,\lambda_0\,\gamma_W\,\frac{\partial h'}{\partial z} \tag{104}$$

und

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = -\,\frac{1}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial\varepsilon'}{\partial r} + 2\,\alpha\,(1+\nu)\,\lambda_0\,\gamma_W\,\frac{\partial h'}{\partial r}\,. \tag{105}$$

Mit

$$W = \mathfrak{Q}\{w\} \qquad \text{und} \qquad U = \mathfrak{Q}\{u\} \tag{106}$$

wird aus (104) und (105) bei Benutzung von (90) und (99)

$$\Delta W = -\,\frac{1}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial H}{\partial z} \tag{107}$$

und

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) U = -\,\frac{1}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial E}{\partial r} + \frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\,\frac{\partial H}{\partial r}\,. \tag{108}$$

Durch Verwendung von (97) und (102) sowie der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial r}\,[J_0(r\,p)] = -\,p\,J_1(r\,p) \tag{109}$$

erhält man aus (107) und (108)

$$\Delta W = \int_0^\infty A(p,s)\left[\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\,p\,e^{-p\,z} - \sqrt{p^2+\varkappa\,s}\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa\,s}\,z}\right]\,p\,J_0(r\,p)\,dp \tag{110}$$

und

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right) U = \int_0^\infty p\, A(p,s) \left[\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\, e^{-pz} - e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right] p\, J_1(r\,p)\, dp\,. \tag{111}$$

Wendet man auf (110) die *Hankel*-Transformation $\mathfrak{H}_0$ an, so ergibt sich wegen (94) und (93)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2\right) \mathfrak{H}_0\{W\} = A(p,s) \left[\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\, p\, e^{-pz} - \sqrt{p^2+\varkappa s}\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right]. \tag{112}$$

Analog ergibt sich durch Anwendung der *Hankel*-Transformation $\mathfrak{H}_1$ auf (111) mit (93) und (95)

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - p^2\right) \mathfrak{H}_1\{U\} = p\, A(p,s) \left[\frac{2\,(1-\nu)}{1-2\,\nu}\, e^{-pz} - e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right]. \tag{113}$$

Die allgemeinen, für $z \to \infty$ verschwindenden Lösungen von (112) und (113) lauten

$$\mathfrak{H}_0\{W\} = -A(p,s) \left[\frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, z\, e^{-pz} + \frac{1}{\varkappa s} \sqrt{p^2+\varkappa s}\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right] + C(p,s)\, e^{-pz} \tag{114}$$

und

$$\mathfrak{H}_1\{U\} = -A(p,s) \left[\frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, z\, e^{-pz} + \frac{p}{\varkappa s}\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right] + D(p,s)\, e^{-pz}\,. \tag{115}$$

Hierin sind $C(p,s)$ und $D(p,s)$ zwei weitere willkürliche Funktionen. Die Rücktransformationen nach (93) liefern

$$W = -\int_0^\infty \left\{A(p,s) \left[\frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, z\, e^{-pz} + \frac{1}{\varkappa s} \sqrt{p^2+\varkappa s}\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right] - C(p,s)\, e^{-pz}\right\} p\, J_0(r\,p)\, dp \tag{116}$$

und

$$U = -\int_0^\infty \left\{A(p,s) \left[\frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, z\, e^{-pz} + \frac{p}{\varkappa s}\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\, z}\right] - D(p,s)\, e^{-pz}\right\} p\, J_1(r\,p)\, dp\,. \tag{117}$$

Gleichung (22) gibt bei Beachtung von (85a) und (104)

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) u + \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon'\,, \tag{118}$$

bzw. im Unterraum

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) U + \frac{\partial W}{\partial z} = E\,. \tag{119}$$

Setzt man in (119) die Ausdrücke (117), (116) und (97) ein, dann erhält man bei Verwendung der Beziehung

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) J_1(r\,p) = p\, J_0(r\,p)$$

die Bedingung

$$\int_0^\infty \left[p\, D(p,s) - \frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, A(p,s) - p\, C(p,s)\right] e^{-pz}\, p\, J_0(r\,p)\, dp = 0\,. \tag{120}$$

Da diese für alle $z \geqq 0$ und $r \geqq 0$ erfüllt sein muß, folgt daraus

$$p\, D(p,s) - \frac{1-\nu}{1-2\,\nu}\, A(p,s) - p\, C(p,s) = 0\,. \tag{121}$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen (88) und (89) drücken wir zunächst die Spannungen des Festkörpers durch die Verschiebungen u und w aus. Wir setzten (21) in (10) ein und erhalten

$$\mathfrak{S}' = \frac{1}{\alpha\,(1+\nu)} \left[\frac{1}{2}\,(\nabla, \mathfrak{u}' + \mathfrak{u}', \nabla) + \frac{\nu}{1-2\,\nu}\, \varepsilon'\, \mathfrak{E}\right]. \tag{122}$$

Mit (85) läßt sich (122) bei Beachtung der Zylindersymmetrie in der Form schreiben

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{rr} & \sigma'_{r\varphi} & \sigma'_{rz} \\ \sigma'_{\varphi r} & \sigma'_{\varphi\varphi} & \sigma'_{\varphi z} \\ \sigma'_{zr} & \sigma'_{z\varphi} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\,(1+\nu)} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon' & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ 0 & \frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon' & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right) & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon' \end{pmatrix}. \tag{123}$$

Die Randbedingung (88) lautet gemäß (123)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0\,, \tag{124}$$

bzw. im Unterraum

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)_{z=0} = 0\,. \tag{125}$$

Unter Verwendung von (116), (117) und (109) ergibt sich aus (125)

$$\int_0^\infty \left[\left(\frac{2\,p}{\varkappa\,s}\sqrt{p^2+\varkappa\,s} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) A(p,s) - p\,C(p,s) - p\,D(p,s)\right] p\,J_1(r\,p)\,dp = 0\,. \tag{126}$$

Da (126) für alle $r \geqq 0$ gelten muß, folgt

$$\left(\frac{2\,p}{\varkappa\,s}\sqrt{p^2+\varkappa\,s} - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\right) A(p,s) - p\,C(p,s) - p\,D(p,s) = 0\,. \tag{127}$$

Die Randbedingung (89) drückt sich mit (123) in der Form

$$\frac{1}{\alpha\,(1+\nu)}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,\varepsilon'\right]_{z=0} = -\,q(r,t) \tag{128}$$

aus, bzw.

$$\frac{1}{\alpha\,(1+\nu)}\left[\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\,E\right]_{z=0} = -\,Q(r,s) \tag{129}$$

mit

$$Q(r,s) = \mathfrak{L}\{q(r,t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,q(r,t)\,dt\,. \tag{130}$$

Mit Verwendung von (116) und (97) folgt aus (129)

$$\int_0^\infty \left[\frac{p^2}{\varkappa\,s}\,A(p,s) - p\,C(p,s)\right] p\,J_0(r\,p)\,dp = -\,\alpha\,(1+\nu)\,Q(r,s)\,. \tag{131}$$

Es ist zweckmäßig, darin $Q(r,s)$ ebenfalls in Integralform darzustellen. Dazu setzen wir

$$\mathfrak{H}_0\{Q(r,s)\} = \int_0^\infty Q(r,s)\,r\,J_0(r\,p)\,dr = \bar{Q}(p,s)\,. \tag{132}$$

Dann liefert die Rücktransformationsgleichung (93)

$$Q(r,s) = \int_0^\infty \bar{Q}(p,s)\,p\,J_0(r\,p)\,dp\,. \tag{133}$$

Aus (131) und (133) ergibt sich

$$\int_0^\infty \left[\frac{p^2}{\varkappa\,s}\,A(p,s) - p\,C(p,s) + \alpha\,(1+\nu)\,\bar{Q}(p,s)\right] p\,J_0(r\,p)\,dp = 0\,.$$

Da diese Beziehung für alle $r \geqq 0$ erfüllt sein muß, folgt

$$\frac{p^2}{\varkappa\,s}\,A(p,s) - p\,C(p,s) = -\,\alpha\,(1+\nu)\,\bar{Q}(p,s)\,. \tag{134}$$

Die Beziehungen (121), (127) und (134) bilden ein inhomogenes Gleichungssystem für die drei Funktionen $A(p, s)$, $C(p, s)$ und $D(p, s)$. Sie liefern

$$A(p,s) = -\frac{\alpha(1+\nu)(1-2\nu)\varkappa s}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\bar{Q}(p,s)\,, \tag{135}$$

$$C(p,s) = -\frac{\alpha(1+\nu)\left[(1-2\nu)p\sqrt{p^2+\varkappa s}-(1-\nu)\varkappa s\right]}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\frac{\bar{Q}(p,s)}{p}\,, \tag{136}$$

$$D(p,s) = -\frac{\alpha(1+\nu)(1-2\nu)\sqrt{p^2+\varkappa s}}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\bar{Q}(p,s)\,. \tag{137}$$

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in (116), (117), (97) und (103) erhält man

$$W = \alpha(1+\nu)\int_0^\infty \frac{\left[(1-\nu)\varkappa s(1+pz)-(1-2\nu)p\sqrt{p^2+\varkappa s}\right]e^{-pz}+(1-2\nu)p\sqrt{p^2+\varkappa s}\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s} \times \bar{Q}(p,s)\,J_0(rp)\,dp\,, \tag{138}$$

$$U = \alpha(1+\nu)\int_0^\infty \frac{\left[(1-\nu)\varkappa sz-(1-2\nu)\sqrt{p^2+\varkappa s}\right]e^{-pz}+(1-2\nu)p\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\bar{Q}(p,s)\,p\,J_1(rp)\,dp\,, \tag{139}$$

$$E = -\alpha(1+\nu)(1-2\nu)\int_0^\infty \frac{\varkappa s\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\bar{Q}(p,s)\,p\,J_0(rp)\,dp\,, \tag{140}$$

$$H = -\alpha(1+\nu)(1-2\nu)\int_0^\infty \frac{\varkappa s\left(e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}-e^{-pz}\right)}{(1-2\nu)p\left(p-\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)+(1-\nu)\varkappa s}\,\bar{Q}(p,s)\,p\,J_0(rp)\,dp\,. \tag{141}$$

Die Gleichungen (138) bis (141) stellen die Lösung des Problems im *Laplace*schen Unterraum dar. Die Rücktransformation kann erst durchgeführt werden, wenn man sich eine spezielle rotationssymmetrische Belastungsverteilung $q(r, t)$ an der Oberfläche vorgibt.

6. Lösung für zeitlich konstante Gleichlast. Im folgenden sei

$$q(r,t) = \begin{cases} q = \text{konst.} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,. \end{cases} \tag{142}$$

Damit erhält man aus (130)

$$Q(r,s) = \begin{cases} \dfrac{q}{s} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,, \end{cases} \tag{143}$$

und aus (132) folgt

$$\bar{Q}(p,s) = \int_0^a \frac{q}{s}\,r\,J_0(rp)\,dr = \frac{qa}{ps}\,J_1(ap)\,. \tag{144}$$

Dieser Ausdruck ist in die Gleichungen (138) bis (141) einzusetzen. Wir formen die entstehenden Ausdrücke durch Rationalmachen des Nenners und darauffolgende Partialbruchzerlegungen um und erhalten:

$$W = \alpha(1+\nu)\,q\,a\,\varkappa\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\varkappa s}\left[(1-\nu)(1+pz)\left(1+\frac{\sqrt{p^2+\varkappa s}}{p}\right)e^{-pz}\right.\right.$$

$$\left.+\nu\left(\nu-\frac{1-\nu}{p}\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\left(e^{-pz}-e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right)\right]-\frac{(1-2\nu)p}{\varkappa^2 s^2}\left(p+\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\left(e^{-pz}-e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right)$$

$$\left.+\frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\left(\nu-\frac{1-\nu}{p}\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\left[(1+pz-\nu)e^{-pz}+\nu\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right]\right\}\frac{J_1(ap)\,J_0(rp)}{p}\,dp\,, \tag{145}$$

$$U = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a\,\varkappa \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\varkappa s}\left[\frac{(1-\nu)\,z}{p}\left(p+\sqrt{p^2+\varkappa s}\right) e^{-pz} \right.\right.$$

$$+\frac{1}{p}\left(\nu - \frac{1-\nu}{p}\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\left(\nu\, e^{-pz} + (1-\nu)\, e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right)\Bigg]$$

$$-\frac{1-2\nu}{\varkappa^2 s^2}\left(p+\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\left(e^{-pz} - e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right)$$

$$+\frac{1}{(1-2\nu)\,p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\,\frac{(1-\nu)^2}{p^2}\left[p\,\nu-(1-\nu)\sqrt{p^2+\varkappa s}\right]$$

$$\left.\times\left[(p\,z-\nu)\,e^{-pz} - (1-\nu)\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right]\right\} J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)\,dp\,, \tag{146}$$

$$E = -\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)\,q\,a\,\varkappa \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\varkappa s}\left(1+\frac{\sqrt{p^2+\varkappa s}}{p}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{(1-2\nu)\,p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\left(\nu-\frac{1-\nu}{p}\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\right\} e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\, J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \tag{147}$$

$$H = \alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)\,q\,a\,\varkappa \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\varkappa s}\left(p+\sqrt{p^2+\varkappa s}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{(1-2\nu)\,p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\left[p\,\nu-(1-\nu)\sqrt{p^2+\varkappa s}\right]\right\}\left(e^{-pz} - e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}\right)\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,. \tag{148}$$

Für die Rücktransformation benötigt man

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{\varkappa s}\right\} = \frac{1}{2\varkappa}\left[e^{pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) + e^{-pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right], \tag{149}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{\varkappa^2 s^2}\right\} = \frac{1}{2\varkappa}\left[\left(\frac{t}{\varkappa}+\frac{z}{2p}\right)e^{pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)+\left(\frac{t}{\varkappa}-\frac{z}{2p}\right)e^{-pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right], \tag{150}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{(1-2\nu)\,p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\right\} = \frac{1}{2\varkappa(1-\nu)^2}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\left[e^{\frac{\nu}{1-\nu}pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{\nu}{1-\nu}pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right], \tag{151}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{p^2+\varkappa s}\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{\varkappa s}\right\} = -\frac{p}{2\varkappa}\left[e^{pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - e^{-pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t}+\frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}, \tag{152}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{p^2+\varkappa s}\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{\varkappa^2 s^2}\right\} = -\frac{1}{2\varkappa p}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{pz}{2}+\frac{p^2 t}{\varkappa}\right)e^{pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{2}-\frac{pz}{2}+\frac{p^2 t}{\varkappa}\right)e^{-pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right]+\frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t}+\frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}, \tag{153}$$

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{p^2+\varkappa s}\,e^{-\sqrt{p^2+\varkappa s}\,z}}{(1-2\nu)\,p^2+(1-\nu)^2\varkappa s}\right\} = -\frac{\nu\,p}{2\varkappa(1-\nu)^3}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\left[e^{\frac{\nu}{1-\nu}pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}+\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{\nu}{1-\nu}pz}\,\mathrm{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right]+\frac{1}{(1-\nu)^2\sqrt{\pi\varkappa t}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t}+\frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}, \tag{154}$$

worin

$$\mathrm{Erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-v^2}\,dv \tag{155}$$

die normierte komplementäre Fehlerfunktion bedeutet.

Die restlichen erforderlichen Ausdrücke erhält man durch Spezialisierung, wenn man in (149) bis (154) $z = 0$ setzt unter Beachtung der Beziehungen

$$\operatorname{Erfc}(0) = 1\,,\ \operatorname{Erfc}(\infty) = 0\,,\ \operatorname{Erfc}(x) + \operatorname{Erfc}(-x) = 2\,,\ \operatorname{Erfc}(-\infty) = 2\,. \tag{156}$$

Damit erhält man aus (145) bis (148) bei Beachtung von (90), (99) und (106)

$$\begin{aligned} w = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty \Bigg\{ & e^{-pz}\Bigg[(1-2\nu)\,\frac{p^2 t}{\varkappa}\left(\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - 2\right) + 2\,(1-\nu)\,p\,z \\ & + \frac{1}{2}\,(3 - 4\nu + 4\nu^2) - \frac{1}{4}\,(2\,(1-2\nu)\,p\,z - (1-4\nu^2))\,\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \left((1-\nu)\,p\,z + \frac{1}{2}\,(1-2\nu+2\nu^2)\right)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\,(1+p\,z-\nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\frac{p^2 t}{\varkappa}}\Bigg] - \frac{1}{4}\,e^{pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & + \nu^2 e^{\frac{\nu}{1-\nu}pz - \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{z\varkappa^2}{4t}} + \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & + \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t} + \frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}\Bigg\}\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,, \end{aligned} \tag{157}$$

$$\begin{aligned} u = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty \Bigg\{ & e^{-pz}\Bigg[(1-2\nu)\,\frac{p^2 t}{\varkappa}\left(\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{x}} + \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - 2\right) + 2\,(1-\nu)\,p\,z \\ & - \frac{1}{2}\,(1-4\nu^2) - \frac{1}{4}\,(1-2\nu)\,(2\,p\,z + 1 - 2\nu)\,\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \left((1-\nu)\,p\,z - \frac{1}{2}\,(1-2\nu^2)\right)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\,(p\,z-\nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\frac{p^2 t}{\varkappa}}\Bigg] + \frac{1}{4}\,e^{pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \nu\,(1-\nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa} + \frac{\nu}{1-\nu}pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & + \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t} + \frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}\Bigg\}\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{p}\,dp\,, \end{aligned} \tag{158}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon' = -\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)\,q\,a \int_0^\infty \Bigg[& e^{-pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & + \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa} + \frac{\nu}{1-\nu}pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg]\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \end{aligned} \tag{159}$$

$$\begin{aligned} {}_0\gamma_W\,h' = q\,a \int_0^\infty \Bigg\{ & e^{-pz}\Bigg[(1-\nu)\left(2 - \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - \operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & + \nu\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg] \\ & - \nu\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa} + \frac{\nu}{1-\nu}pz}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg\}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,. \end{aligned} \tag{160}$$

Man überzeugt sich leicht, daß h' die Beziehung (81a) nicht erfüllt [vgl. die nach Gleichung (81a) folgende Bemerkung].

Aus (157) und (158) ergibt sich, daß bereits unmittelbar nach der Lastaufbringung ($t = 0+$) von Null verschiedene Verschiebungen w und u vorhanden sind im Gegensatz zu dem vorher behandelten einachsigen Problem. Es ist

$$(w)_{\substack{t=0+\\ z>0}} = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty (1+p\,z)\,e^{-p\,z}\,\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,, \tag{161}$$

$$(u)_{\substack{t=0+\\ z>0}} = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty z\,e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)\,dp\,. \tag{162}$$

Für die praktisch besonders wichtigen Werte der Verschiebungen an der Oberfläche ($z = 0$) erhält man aus (157) und (158)

$$(w)_{\substack{z=0\\ t>0}} = \alpha\,(1+\nu)\,(1-\nu)\,q\,a \int_0^\infty \left[2 - \operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right.$$
$$\left. + \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)\right]\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,, \tag{163}$$

$$(u)_{\substack{z=0\\ t>0}} = -\alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty \left[(1-2\,\nu) - (1-\nu)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right.$$
$$\left. + \nu e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)\right]\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{p}\,dp\,. \tag{164}$$

Aus (161) und (163) bzw. aus (162) und (164) erhält man übereinstimmend die Anfangswerte an der Oberfläche

$$\lim_{z\to 0}(w)_{t=0+} = \lim_{t\to 0+}(w)_{z=0} = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty \frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\alpha\,(1+\nu)\,q\,a\,\boldsymbol{E}\left(\dfrac{r}{a}\right) & \text{für } r \leqq a\,, \\ \dfrac{2}{\pi}\alpha\,(1+\nu)\,q\,r\left[\boldsymbol{E}\left(\dfrac{a}{r}\right) - \left(1-\dfrac{a^2}{r^2}\right)\boldsymbol{K}\left(\dfrac{a}{r}\right)\right] & \text{für } r \geqq a\,, \end{cases} \tag{165}$$

$$\lim_{z\to 0}(u)_{t=0+} = \lim_{t\to 0+}(u)_{z=0} = 0\,, \tag{166}$$

worin

$$\boldsymbol{E}(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}\;d\varphi \tag{167}$$

und

$$\boldsymbol{K}(\xi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\xi^2\sin^2\varphi}} \tag{168}$$

bedeuten. In gleicher Weise erhält man aus (159) und (160)

$$(\varepsilon')_{\substack{t=0+\\ z>0}} = 0\,, \tag{169}$$

$$(\hat{\lambda}_0\,\gamma_W\,h')_{\substack{t=0+\\ z>0}} = q\,a\int_0^\infty e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp \tag{170}$$

und

$$(\varepsilon')_{\substack{z=0\\t>0}} = -\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)\,q\,a\int_0^\infty\left[2-\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right]J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \tag{171}$$

$$(\lambda_0\,\gamma_W\,h')_{\substack{z=0\\t>0}} = 0\,. \tag{172}$$

Aus (169) erhält man

$$\lim_{z\to 0}(\varepsilon')_{t=0+} = 0\,, \tag{173}$$

jedoch aus (171)

$$\lim_{t\to 0+}(\varepsilon')_{z=0} = -\frac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu}\,q\,a\int_0^\infty J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,d\,p = \begin{cases} -\dfrac{\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\nu)}{1-\nu}\,q & \text{für } r<a\,,\\ 0 & \text{für } r>a\,. \end{cases} \tag{174}$$

Aus (170) bzw. (172) erkennt man

$$\lim_{z\to 0}(\lambda_0\,\gamma_W\,h')_{t=0+} = q\,a\int_0^\infty J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp = \begin{cases} q & \text{für } r<a\,,\\ 0 & \text{für } r>a\,, \end{cases} \tag{175}$$

hingegen

$$\lim_{t\to 0+}(\lambda_0\,\gamma_W\,h')_{z=0} = 0\,. \tag{176}$$

Man sieht hieraus, daß ε' und h' zur Zeit $t = 0+$ für $z = 0$ eine Unstetigkeit aufweisen. (169) zeigt, daß die Anfangsbedingung (86) erfüllt ist, aus (174) erkennt man, daß zur Zeit $t = 0+$ an der Oberfläche für $r < a$ ein ε' vorhanden ist, wie es einem einachsigen Deformationszustand entspricht (vgl. Gleichung (79)). Die Gleichungen (172) und (176) zeigen, daß die Randbedingung (87) erfüllt ist; aus (175) erkennt man, daß für $t = 0+$ unmittelbar unter der Oberfläche $\lambda_0\,\gamma_W\,h'$ gleich der Belastung q ist, während $\lambda_0\,\gamma_W\,h'$ laut (170) mit wachsendem z gegen Null geht.

Bei Beachtung von

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\frac{p^2 t}{\varkappa}\left[2-\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}}-\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)-\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{x}}\right]\right\} = 0 \tag{177}$$

erhält man aus (157) bis (160) für den Endzustand $(t = \infty)$

$$(w)_{t=\infty} = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty\left[p\,z+2\,(1-\nu)\right]e^{-p\,z}\,\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,, \tag{178}$$

$$(u)_{t=\infty} = \alpha\,(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty\left[p\,z-(1-2\,\nu)\right]e^{-p\,z}\,\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{p}\,dp\,, \tag{179}$$

$$(\varepsilon')_{t=\infty} = -2\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)\,q\,a\int_0^\infty e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \tag{180}$$

$$(\lambda_0\,\gamma_W\,h')_{t=\infty} = 0\,. \tag{181}$$

Die Gleichungen (178), (179) und (180) gehen, wenn man den Grenzübergang zu einer Einzellast P durchführt, in die bekannten Gleichungen von *Boussinesq* über. Dazu setzt man

$$q = \frac{P}{a^2\pi} \tag{182}$$

und führt den Grenzübergang $a \to 0$ bei Beachtung von

$$\lim_{a\to 0}\frac{J_1(a\,p)}{a} = \frac{p}{2} \tag{183}$$

durch.

Aus (178) und (179) erhält man für die Verschiebungen an der Oberfläche ($z = 0$):

$$(w)_{\substack{t=\infty\\ z=0}} = 2\alpha(1-\nu^2)\,q\,a\int_0^\infty \frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{\pi}\alpha(1-\nu^2)\,q\,a\,\boldsymbol{E}\left(\frac{a}{r}\right) & \text{für } r \leqq a, \\ \frac{4}{\pi}\alpha(1-\nu^2)\,q\,r\left[\boldsymbol{E}\left(\frac{a}{r}\right)-\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\boldsymbol{K}\left(\frac{a}{r}\right)\right] & \text{für } r \geqq a, \end{cases} \tag{184}$$

$$(u)_{\substack{t=\infty\\ z=0}} = -\alpha(1+\nu)(1-2\nu)\,q\,a\int_0^\infty \frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{p}\,dp = \begin{cases} -\frac{\alpha}{2}(1+\nu)(1-2\nu)\,q\,r & \text{für } r \leqq a, \\ -\frac{\alpha}{2}(1+\nu)(1-2\nu)\,q\frac{a^2}{r} & \text{für } r \geqq a. \end{cases} \tag{185}$$

Die Spannungen im Festkörper ergeben sich aus (123) mit (157), (158) und (159). Man erhält bei Beachtung der Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(J_1(r\,p)\right) = p\left[J_0(r\,p) - \frac{J_1(r\,p)}{r\,p}\right] \tag{186}$$

die Ausdrücke

$$\sigma'_{rr} = q\,a\int_0^\infty \Bigg\{ e^{-p\,z}\Bigg[(1-2\nu)\frac{p^2\,t}{\varkappa}\left(\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}} + \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}-\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)-2\right) + 2(1-\nu)\,p\,z$$
$$-\frac{1}{2}(1-4\nu^2)-\frac{1}{4}(1-2\nu)(2\,p\,z+1-2\nu)\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}-\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$-\left((1-\nu)\,p\,z-\frac{1}{2}(1-2\nu^2)\right)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}} + \nu\,(p\,z-\nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$-\frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\,e^{-\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\Bigg] + \frac{1}{4}e^{p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}+\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$-\nu(1-\nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}+\frac{\nu}{1-\nu}p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}+\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$+\frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}+\frac{p^2\,t}{\varkappa}\right)}\Bigg\}J_1(a\,p)\left[J_0(r\,p)-\frac{J_1(r\,p)}{r\,p}\right]dp - q\,a\int_0^\infty\Bigg[\nu\,e^{-p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}-\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$+\frac{\nu^2}{1-\nu}e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}+\frac{\nu}{1-\nu}p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}+\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)\Bigg]J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \tag{187}$$

$$\sigma'_{r\varphi} = 0\,, \tag{188}$$

$$\sigma'_{rz} = \frac{q\,a}{2}\int_0^\infty\Bigg\{e^{-p\,z}\Bigg[2(1-2\nu)\frac{p^2\,t}{\varkappa}\left(2-\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}-\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)-\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)-4(1-\nu)\,p\,z$$
$$+1-4\nu^2+(1-2\nu)\left(p\,z-\frac{1}{2}(1+2\nu)\right)\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}-\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$+\left(2(1-\nu)\,p\,z-(1-2\nu^2)\right)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}$$
$$+2\nu(\nu-p\,z)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)+\frac{2(1-2\nu)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\,e^{-\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\Bigg]$$
$$+\frac{1}{2}e^{p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}+\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)-2\nu^2\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}+\frac{\nu}{1-\nu}p\,z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}}+\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)$$
$$-\frac{2(1-2\nu)}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa\,z^2}{4\,t}+\frac{p^2\,t}{\varkappa}\right)}\Bigg\}J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)\,dp\,, \tag{189}$$

$$\sigma'_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon' \quad \text{mit } u \text{ gemäß (158) und } \varepsilon' \text{ gemäß (159),} \tag{190}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_{zz} = q\,a \int_0^\infty \Bigg\{ & e^{-p z}\Bigg[(1-2\nu)\frac{p^2 t}{\varkappa}\left(2 - \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - \operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) - 2(1-\nu)\,p z \\ & + \frac{1}{2}(1-4\nu^2) + \frac{1}{2}\left((1-2\nu)\,p z - \frac{1}{2}(3-4\nu^2)\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} - \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right. \\ & \left. + \left((1-\nu)\,p z - \frac{1}{2}(1-2\nu^2)\right)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} - \nu\,(p z - \nu)\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right. \\ & \left. + \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right] - \frac{1}{4}e^{p z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \nu^2 e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa} + \frac{\nu}{1-\nu}p z}\operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\frac{\varkappa z^2}{4t}} + \frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right) \\ & - \frac{1-2\nu}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,e^{-\left(\frac{\varkappa z^2}{4t} + \frac{p^2 t}{\varkappa}\right)}\Bigg\} J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,. \end{aligned} \tag{191}$$

Während im einachsigen Fall der Festkörper zur Zeit $t = 0+$ für $z > 0$ noch keine zusätzlichen Spannungen aufweist, erhält man hier für $t = 0+$ die folgenden Ausdrücke:

$$(\sigma'_{rr})_{\substack{t=0+\\ z>0}} = q\,a \int_0^\infty p\,z\,e^{-p z}\,J_1(a\,p)\left[J_0(r\,p) - \frac{J_1(r\,p)}{r\,p}\right]dp \tag{192}$$

und daraus

$$\lim_{z\to 0}(\sigma'_{rr})_{t=0+} = 0\,, \tag{192a}$$

$$(\sigma'_{rz})_{\substack{t=0+\\ z>0}} = -\,q\,a \int_0^\infty p\,z\,e^{-p z}\,J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)\,dp\,, \tag{193}$$

$$\lim_{z\to 0}(\sigma'_{rz})_{t=0+} = 0\,, \tag{193a}$$

$$(\sigma'_{\varphi\varphi})_{\substack{t=0+\\ z>0}} = q\,a \int_0^\infty \frac{z}{r}\,e^{-p z}\,J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)\,dp\,, \tag{194}$$

$$\lim_{z\to 0}(\sigma'_{\varphi\varphi})_{t=0+} = 0\,, \tag{194a}$$

$$(\sigma'_{zz})_{\substack{t=0+\\ z>0}} = -\,q\,a \int_0^\infty p\,z\,e^{-p z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,, \tag{195}$$

$$\lim_{z\to 0}(\sigma'_{zz})_{t=0+} = 0\,. \tag{195a}$$

Für die Oberfläche ($z = 0$) erhält man aus (187), (189), (190) und (191)

$$(\sigma'_{rr})_{\substack{z=0\\ t>0}} = q\,a \int_0^\infty \left[-1 + \operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} - \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right] J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp$$

$$+ \frac{q\,a}{r}\int_0^\infty \left[(1-2\nu) - (1-\nu)\operatorname{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\right] \frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{p}\,dp\,, \tag{196}$$

$$\lim_{t\to 0}(\sigma'_{rr})_{z=0} = -\frac{\nu}{1-\nu}\,q\,a \int_0^\infty J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp = \begin{cases} -\dfrac{\nu}{1-\nu}q & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,, \end{cases} \tag{196a}$$

$$(\sigma'_{rz})_{\substack{z=0\\ t\geq 0}} = 0\,, \tag{197}$$

$$(\sigma'_{\varphi\varphi})_{\substack{z=0\\t>0}} = -\alpha(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty\Bigg[(1-2\nu)-(1-\nu)\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\, e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg]\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{r\,p}\,dp$$

$$-\alpha\,\nu(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty\Bigg[2-\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg]J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp, \tag{189}$$

$$\lim_{t\to 0}(\sigma'_{\varphi\varphi})_{z=0} = -\alpha\frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}q\,a\int_0^\infty J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp = \begin{cases} -\alpha\dfrac{\nu(1+\nu)}{1-\nu}q & \text{für } r<a,\\ 0 & \text{für } r>a,\end{cases} \tag{198a}$$

$$(\sigma'_{zz})_{\substack{z=0\\t\geq 0}} = -\,q\,a\int_0^\infty J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp = \begin{cases} -\,q & \text{für } r<a,\\ 0 & \text{für } r>a.\end{cases} \tag{199}$$

Die Gleichungen (197) und (199) zeigen, daß die Randbedingungen (88) und (89) erfüllt sind, ferner erkennt man aus (196a) und (198a), daß zur Zeit $t = 0+$ für $z = 0$, $r < a$ ein einachsiger Verzerrungszustand besteht, was bereits auch aus (174) hervorging.

Für den Endzustand ($t = \infty$) ergibt sich aus (187) bis (191) folgende Spannungsverteilung:

$$(\sigma'_{rr})_{t=\infty} = -\,q\,a\left\{\int_0^\infty(1-p\,z)\,e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp + \int_0^\infty[p\,z-(1-2\nu)]\,e^{-p\,z}\,\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{r\,p}\,dp\right\} \tag{200}$$

$$(\sigma'_{rz})_{t=\infty} = 0\,, \tag{201}$$

$$(\sigma'_{\varphi\varphi})_{t=\infty} = -\,q\,a\left\{2\,\nu\int_0^\infty e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp + \int_0^\infty[(1-2\nu)-p\,z]\,e^{-p\,z}\,\frac{J_1(a\,p)\,J_1(r\,p)}{r\,p}\,d\,p\right\}, \tag{202}$$

$$(\sigma'_{zz})_{t=\infty} = -\,q\,a\int_0^\infty(1+p\,z)\,e^{-p\,z}\,J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)\,dp\,. \tag{203}$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, gehen die Gleichungen (200) bis (203) für den Grenzfall der Einzelkraft in die bekannten Formeln von *Boussinesq* über.

7. Berechnung der Setzungen. a) Setzung unter der konstanten Flächenbelastung. Da im Gegensatz zum einachsigen Fall in dem hier behandelten räumlichen Vorgang bereits zur Zeit $t = 0+$ Verschiebungen der Oberfläche in vertikaler Richtung vorhanden sind „Anfangssetzung", soll der Ausdruck

$$S(r,t) = [w(r,t) - w(r,0+)]_{z=0} \tag{204}$$

als „Nachsetzung" bezeichnet werden. Aus (163) und (165) folgt

$$S(r,t) = \alpha(1+\nu)\,q\,a\int_0^\infty\Bigg[(1-2\nu)-(1-\nu)\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\, e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2 t}{\varkappa}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}}\right)\Bigg]\frac{J_1(a\,p)\,J_0(r\,p)}{p}\,dp\,. \tag{205}$$

Um einen mittleren Wert der Nachsetzung unter der Flächenlast zu bekommen, soll der Mittelwert

$$S_m(t) = \frac{1}{a^2\,\pi}\int_0^a 2\,r\,\pi\,S(r,t)\,dr \tag{206}$$

als „mittlere Nachsetzung" eingeführt werden. Mit

$$\int_0^a r\, J_0(r\,p)\, dr = \frac{a}{p}\, J_1(a\,p) \tag{207}$$

erhält man hierfür aus (206) und 205)

$$S_m(t) = 2\,\alpha\,(1+\nu)\,q \int_0^\infty \left[(1-2\,\nu) - (1-\nu)\,\mathrm{Erfc}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}} + \nu\, e^{-\frac{1-2\,\nu}{(1-\nu)^2}\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\sqrt{\frac{p^2\,t}{\varkappa}}\right)\right]\frac{J_1^2(a\,p)}{p^2}\,dp\,. \tag{208}$$

Führt man die Substitution $a\,p = p_1$ durch und verwendet als dimensionslose Zeit

$$t^* = \frac{t}{a^2\,\varkappa} \tag{209}$$

so erhält man aus (208), wenn man statt p_1 wieder p schreibt,

$$S_m = 2\,\alpha\,(1+\nu)\,q\,a \int_0^\infty \left[(1-2\,\nu) - (1-\nu)\,\mathrm{Erfc}\,(p\sqrt{t^*}) + \nu\, e^{-\frac{1-2\,\nu}{(1-\nu)^2}\,p^2\,t^*}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\,p\sqrt{t^*}\right)\right]\frac{J_1^2(p)}{p^2}\,dp \tag{210}$$

und daraus für $t = \infty$

$$(S_m)_{t=\infty} = 2\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)\,q\,a \int_0^\infty \frac{J_1^2(p)}{p^2}\,d\,p = \frac{8\,\alpha}{3\,\pi}\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)\,q\,a\,. \tag{211}$$

Definiert man als „dimensionslose mittlere Nachsetzung"

$$S_m^* = \frac{S_m}{(S_m)_{t=\infty}} = \frac{3\,\pi}{8\,\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)\,q\,a}\,S_m\,, \tag{212}$$

so wird schließlich aus (210) mit (212)

$$S_m^* = 1 - \frac{3\,\pi\,(1-\nu)}{4\,(1-2\,\nu)} \int_0^\infty \left[\mathrm{Erfc}\,(p\sqrt{t^*}) - \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\,\nu}{(1-\nu)^2}\,p^2\,t^*}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\,p\sqrt{t^*}\right)\right]\frac{J_1^2(p)}{p^2}\,dp\,. \tag{213}$$

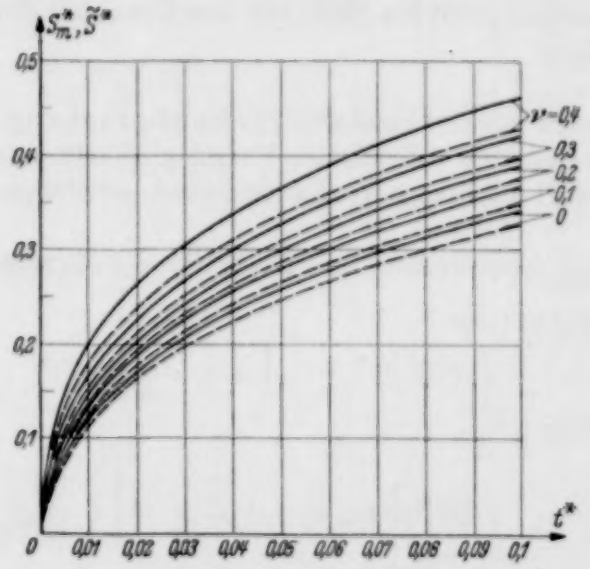

Abb. 5. Zeitlicher Verlauf der Nachsetzungen S_m^* (volle Linien) und $\tilde{S}^*$ (strichlierte Linien).

Es ist

$$(S_m^*)_{t=0} = 0 \tag{214}$$

und

$$(S_m^*)_{t=\infty} = 1\,. \tag{215}$$

In den Abb. 5 und 6 ist S_m^* in Abhängigkeit von t^* für verschiedene Werte von ν aufgetragen (volle Linien.) Die Kurven wurden durch numerische Integration aus (213) gewonnen[1].

Für den analog (206) über die Kreisfläche der Last gemittelten Wert $(w_m)_{t=0+}$ der Anfangssetzung

$$(w_m)_{t=0+} = \frac{1}{a^2\,\pi}\int_0^a 2\,r\,\pi\,[w(r)]_{\substack{z=0\\ t=0+}}\,dr \tag{216}$$

erhält man mit (212) aus (165)

$$(w_m)_{t=0+} = \frac{8\,\alpha}{3\,\pi}\,(1+\nu)\,q\,a\,. \tag{217}$$

[1] Die zahlenmäßigen Auswertungen wurden vom Mathematischen Labor der Technischen Hochschule in Wien durchgeführt, wofür wir seinem Vorstand, Herrn Professor Dr. *R. Inzinger* und dessen Mitarbeitern bestens danken.

Benutzt man zum Dimensionslosmachen von $(w_m)_{t=0+}$ denselben Faktor wie in (212), so erhält man aus (217)

$$(w_m^*)_{t=0+} = \frac{1}{1-2\nu}. \tag{218}$$

Man erkennt aus (214), (215) und (218), daß der Wert der mittleren Anfangssetzung unter der Kreisfläche stets größer ist als der Endwert der darauffolgenden mittleren Nachsetzung.

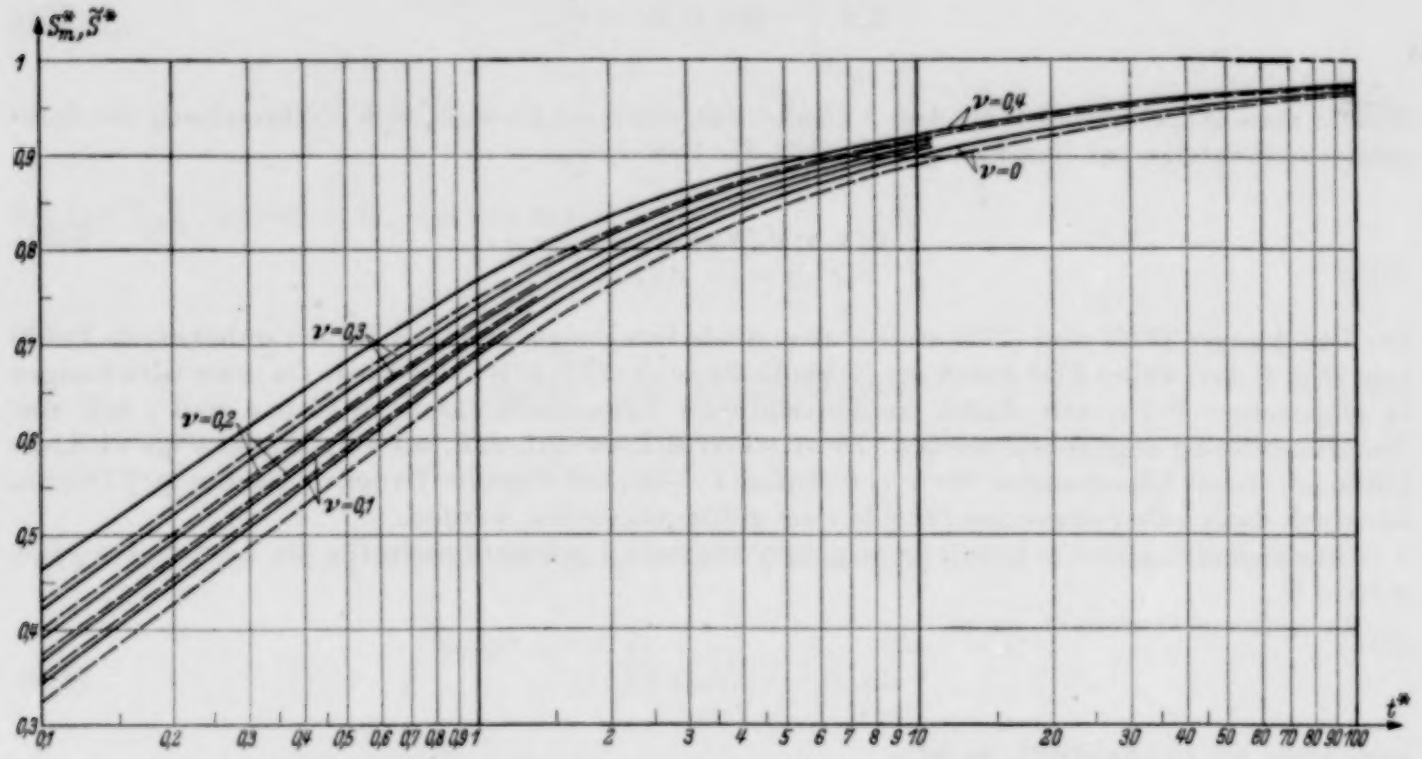

Abb. 6. Fortsetzung der Kurven von Abb. 5, Zeitachse logarithmisch geteilt.

b) Setzung unter einem starren Stempel. Zum Vergleich soll noch die Setzung unter einem starren, durchlässigen Stempel vom Halbmesser a näherungsweise berechnet werden. In diesem Fall ist in der Randbedingung (89) $q(r,t)$ unbekannt und so zu bestimmen, daß

$$q(r,t) = 0 \quad \text{für} \quad r > a \tag{219}$$

und

$$(w)_{\substack{z=0 \\ r<a}} = f(t) \tag{220}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^a 2\,r\,\pi\,q(r,t) = P\,, \tag{221}$$

wobei $f(t)$ eine noch zu suchende Zeitfunktion und P die vorgegebene Gesamtlast ist. P sei zeitlich konstant.

Bei Beachtung von (133) lautet (219) im *Laplace*schen Unterraum

$$Q(r,s) = \int_0^\infty \bar{Q}(p,s)\,p\,J_0(r\,p)\,dp = 0 \quad \text{für } r > a\,. \tag{222}$$

Die *Laplace*-Transformation von (220) liefert

$$(W)_{\substack{z=0 \\ r<a}} = F(s) \tag{223}$$

mit

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\,. \tag{224}$$

Aus (138) und (223) ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\bar{Q}(p,s)\, J_0(r\,p)}{(1-2\,\nu)\,p\,(p-\sqrt{p^2+\varkappa\,s})+(1-\nu)\,\varkappa\,s}\,dp = \frac{F(s)}{\alpha\,(1-\nu^2)\,\varkappa\,s} \qquad \text{für } r<a\,. \tag{225}$$

Gleichung (221) lautet im *Laplace*schen Unterraum

$$2\,\pi\int_0^a r\,Q(r,s)\,dr = \frac{P}{s}\,. \tag{226}$$

Drückt man $Q(r,s)$ gemäß (133) durch $\bar{Q}(p,s)$ aus, dann erhält man nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei Beachtung von (207) die Beziehung

$$\int_0^\infty \bar{Q}(p,s)\,J_1(a\,p)\,dp = \frac{P}{2\,\pi\,a\,s}\,. \tag{227}$$

Die Gleichungen (222) und (225) stellen zwei duale Integralgleichungen für die unbekannte Funktion $\bar{Q}(p,s)$ dar, wobei $F(s)$ durch die Nebenbedingung (227) bestimmt wird. Da diese Gleichungen in allgemeiner Form nur durch unübersichtliche Reihenentwicklungen lösbar sind[1], soll eine Näherungslösung angegeben werden. Diese stützt sich darauf, daß, wie zunächst gezeigt wird, die Lösungen dieser Gleichungen für $t=0+$ und $t=\infty$ auf dieselbe Druckverteilung $q(r)$ führen. Diese soll dann näherungsweise für alle t als gültig angesehen werden.

Für die Zeiten $t=0+$ bzw. $t=\infty$ gelten folgende Umkehrformeln für die *Laplace*-Transformation[2]:

Wenn $\lim\limits_{t\to 0} g(t)$ existiert, so ist

$$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{s\to\infty}\,[s\,\mathfrak{L}\{g(t)\}]\,, \tag{228}$$

bzw. wenn $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)$ existiert, so ist

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{s\to 0}\,[s\,\mathfrak{L}\{g(t)\}]\,. \tag{229}$$

Bezeichnet man demnach

$$\lim_{s\to\infty}\,[s\,\bar{Q}(p,s)] = \bar{q}_0(p)\,, \tag{230}$$

wobei gemäß (228)

$$\bar{q}_0(p) = \int_0^\infty [q(r)]_{t=0+}\,r\,J_0(r\,p)\,dr \tag{231}$$

und

$$\lim_{s\to\infty}\,[s\,F(s)] = f(0)\,,$$

dann erhält man aus (225) nach Multiplikation mit s^2 und Ausführung des Grenzüberganges $s\to\infty$ die Beziehung

$$\int_0^\infty \bar{q}_0(p)\,J_0(r\,p)\,dp = \frac{f(0)}{\alpha\,(1+\nu)} \qquad \text{für } r<a\,. \tag{233}$$

Nach Multiplikation mit s liefert derselbe Grenzübergang aus (222)

$$\int_0^\infty \bar{q}_0(p)\,p\,J_0(r\,p)\,dp = 0 \qquad \text{für } r>a\,. \tag{234}$$

Die Lösung des Systems (233) und (234) lautet[3]

$$\bar{q}_0(p) = \frac{2}{\pi}\,\frac{f(0)}{\alpha\,(1+\nu)}\,\frac{\sin a\,p}{p}\,. \tag{235}$$

---

[1] Vgl. z. B. S. 111ff. des in Fußnote 1 von S. 236 zitierten Buches.
[2] *G. Doetsch*, Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation, S. 117, München 1956.
[3] Vgl. S. 117 des in Fußnote 1 von Seite 236 zitierten Buches.

Damit liefert die Umkehrung von (231) laut (93)

$$[q(r)]_{t=0+} = \frac{2f(0)}{\pi\,\alpha\,(1+\nu)} \int_0^\infty \sin\, a\,p \cdot J_0(r\,p)\; dp = \begin{cases} \dfrac{2f(0)}{\pi\,\alpha\,(1+\nu)} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,. \end{cases} \tag{236}$$

Die Nebenbedingung (221) gibt

$$f(0) = \frac{P}{4\,a}\,\alpha\,(1+\nu)\,. \tag{237}$$

Somit ist

$$[q(r)]_{t=0+} = \begin{cases} \dfrac{P}{2\,\pi\,a} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,. \end{cases} \tag{238}$$

Um $[q(r)]_{t=\infty}$ zu finden, bezeichnen wir

$$\lim_{s\to 0} [s\;\bar{Q}(p,s)] = \bar{q}_\infty(p) \tag{239}$$

mit

$$\bar{q}_\infty(p) = \int_0^\infty [q(r)]_{t=\infty}\, r J_0(r\,p)\; dr \tag{240}$$

und

$$\lim_{s\to 0} [s\,F(s)] = f(\infty)\,. \tag{241}$$

Dann erhält man analog zu (233) und (234) aus (225) bzw. (222) durch die Grenzübergänge $s \to 0$

$$\int_0^\infty \bar{q}_\infty(p)\, J_0(r\,p)\, dp = \frac{f(\infty)}{2\,\alpha\,(1-\nu^2)} \quad \text{für } r < a \tag{242}$$

bzw.

$$\int_0^\infty \bar{q}_\infty(p)\, p\, J_0(r\,p)\, dp = 0 \quad \text{für } r > a\,. \tag{243}$$

Diese beiden Gleichungen haben dieselbe Form wie (234) und (235). Es ist demnach

$$\bar{q}_\infty(p) = \frac{f(\infty)}{\alpha\,(1-\nu^2)\,\pi} \frac{\sin a\,p}{p}\,. \tag{244}$$

Die Rücktransformation gibt

$$[q(r)]_{t=\infty} = \frac{f(\infty)}{\alpha\,(1-\nu^2)\,\pi} \int_0^\infty \sin\; ap \cdot J_0(r\,p)\; dp = \begin{cases} \dfrac{f(\infty)}{\alpha\,(1-\nu^2)\,\pi} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,, \end{cases} \tag{245}$$

Die Nebenbedingung (221) führt auf

$$f(\infty) = \frac{\alpha\,(1-\nu^2)\;P}{2\,a} \tag{246}$$

Somit ist

$$[q(r)]_{t=\infty} = \begin{cases} \dfrac{P}{2\,\pi\,a} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} & \text{für } r < a\,, \\ 0 & \text{für } r > a\,. \end{cases} \tag{247}$$

Es gilt also, wie gezeigt werden sollte,

$$[q(r)]_{t=0+} = [q(r)]_{t=\infty}\,. \tag{248}$$

Aus (235) mit (237) bzw. aus (244) mit (246) folgt

$$\bar{q}_0(p) = \bar{q}_\infty(p) = \frac{P}{2\,\pi\,a} \frac{\sin a\,p}{p}\,. \tag{249}$$

Wenn wir nun näherungsweise $q(r)$ als zeitlich konstant ansehen, ergibt sich aus (249)

$$\bar{Q}(p,s) = \mathfrak{L}\{\bar{q}(p)\} = \frac{P}{2\,\pi\,a} \frac{\sin a\,p}{p\,s}\,. \tag{250}$$

Durch Einführen dieses Wertes in die Gleichung (138) bis (141) kann die zu dieser Druckverteilungen gehörige Lösung ermittelt werden. Es soll hier jedoch nur noch die Setzung der Oberfläche berechnet werden.[1] Die Gleichungen (138) und (250) ergeben für $z = 0$

$$\widetilde{W}_{z=0} = \frac{P}{2\pi a} \varkappa \alpha (1-\nu^2) \int_0^\infty \frac{1}{(1-2\nu)\, p\, (p - \sqrt{p^2 + \varkappa s})} \frac{\sin a p}{p} J_0(r p)\, dp\,. \tag{251}$$

Nach Rationalmachen des Nenners und Partialbruchzerlegung wird

$$\widetilde{W}_{z=0} = \frac{P}{2\pi a} \varkappa \alpha (1-\nu^2) \int_0^\infty \left[(1-\nu) \frac{\nu p - (1-\nu)\sqrt{p^2 + \varkappa s}}{(1-2\nu) p^2 + (1-\nu)^2 \varkappa s} + \frac{p + \sqrt{p^2 + \varkappa s}}{\varkappa s} \right] \frac{\sin a p}{p^2} J_0(r p)\, dp\,. \tag{252}$$

Mit Verwendung der für $z = 0$ spezialisierten Formeln (149), (151), (152) und (154) erhält man

$$\widetilde{w}_{z=0} = \frac{P}{2\pi a} \alpha (1-\nu^2) \int_0^\infty \left[2 - \operatorname{Erfc} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \frac{\nu}{1-\nu} e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} \right) \right] \frac{\sin a p}{p} J_0(r p)\, d p\,. \tag{253}$$

Daraus folgt die Anfangssetzung

$$\widetilde{w}_{\substack{z=0 \\ t=0+}} = \frac{P}{2\pi a} \alpha (1+\nu) \int_0^\infty \frac{\sin a p}{p} J_0(r p)\, dp = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{P}{4a} \alpha (1+\nu) & \text{für } r \leqq a\,, \\ \dfrac{P}{2\pi a} \alpha (1+\nu) \arcsin \dfrac{a}{r} & \text{für } r \geqq a \end{array} \right\} \tag{254}$$

und der Endwert der Gesamtsetzung

$$\widetilde{w}_{\substack{z=0 \\ t=\infty}} = \frac{P}{\pi a} \alpha (1-\nu^2) \int_0^\infty \frac{\sin a p}{p} J_0(r p)\, dp = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{P}{2a} \alpha (1-\nu^2) & \text{für } r \leqq a\,, \\ \dfrac{P}{\pi a} \alpha (1-\nu^2) \arcsin \dfrac{a}{r} & \text{für } r \geqq a\,. \end{array} \right\} \tag{255}$$

Als „Nachsetzung" soll wieder der Ausdruck

$$\widetilde{S}(r, t) = [\widetilde{w}(r, t) - \widetilde{w}(r, 0+)]_{z=0} \tag{256}$$

bezeichnet werden. Mit (253) und (254) ist

$$\widetilde{S}(r, t) = \frac{P}{2\pi a} \alpha (1+\nu) \int_0^\infty \left[(1-2\nu) - (1-\nu) \operatorname{Erfc} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\, e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} \right) \right] \frac{\sin a p}{p} J_0(r p)\, dp\,. \tag{257}$$

Da für $0 < t < \infty$ die Setzung zufolge der gemachten Näherung auch für $r < a$ noch von r abhängt, soll analog zu (206) wieder der Mittelwert $\widetilde{S}_m(t)$ über die Kreisfläche eingeführt werden. Mit (207) wird

$$\widetilde{S}_m(t) = \frac{P \alpha}{a^2 \pi} (1+\nu) \int_0^\infty \left[(1-2\nu) - (1-\nu) \operatorname{Erfc} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} + \nu\, e^{-\frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{p^2 t}{\varkappa}} \operatorname{Erfc} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \sqrt{\frac{p^2 t}{\varkappa}} \right) \right] \frac{\sin a p}{p^2} J_1(a p)\, dp\,. \tag{258}$$

[1] Im folgenden werden die Größen, die sich auf die Belastung durch einen starren Stempel beziehen, durch eine Tilde gekennzeichnet.

Führt man die Substitution $a\,p = p_1$ durch und verwendet wieder die dimensionslose Zeit nach (209), dann wird schließlich, wenn man statt p_1 wieder p schreibt

$$\widetilde{S}_m = \frac{P\alpha}{a\,\pi}(1+\nu)\int_0^\infty \Big[(1-2\,\nu) - (1-\nu)\,\mathrm{Erfc}\left(p\sqrt{t^*}\right) + \nu\, e^{-\frac{1-2\,\nu}{(1-\nu)^2}p^2 t^*}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}p\sqrt{t^*}\right)\Big]\frac{\sin p}{p^2}J_1(p)\,dp\,. \tag{259}$$

Daraus folgt

$$\left(\widetilde{S}_m\right)_{t=\infty} = \frac{P\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{a\,\pi}\int_0^\infty \frac{\sin p}{p^2}J_1(p)\,dp = \frac{P\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}{4\,a}\,. \tag{260}$$

Nun lassen sich für die beiden behandelten Fälle der konstanten Flächenlast und des starren Stempels bei gleicher Gesamtlast

$$P = a^2\,\pi\,q \tag{261}$$

die mittleren Anfangssetzungen $(w_m)_{t=0+}$ und $(\widetilde{w}_m)_{t=0+}$ bzw. die Endwerte der mittleren Nachsetzungen $(S_m)_{t=\infty}$ und $(\widetilde{S}_m)_{t=\infty}$ vergleichen. Aus (217) und (254) erhält man

$$\frac{(w_m)_{t=0+}}{(\widetilde{w}_m)_{t=0+}} = \frac{32}{3\,\pi^2} = 1{,}081 \tag{262}$$

bzw. aus (211) und (260)

$$\frac{(S_m)_{t=\infty}}{(\widetilde{S}_m)_{t=\infty}} = \frac{32}{3\,\pi^2} = 1{,}081\,. \tag{263}$$

Man erkennt daraus, daß die beiden Grenzfälle des absolut nachgiebigen und des absolut starren Stempels bei gleicher Gesamtlast nahezu dieselben Werte für die über die Kreisfläche gemittelten Anfangssetzungen und für die gemittelten Endwerte der Nachsetzungen liefern. Um auch den zeitlichen Verlauf vergleichen zu können, beziehen wir analog wie früher $\widetilde{S}_m$ auf $(\widetilde{S}_m)_{t=\infty}$ und erhalten für die dimensionslose Nachsetzung

$$\widetilde{S}^* = \frac{\widetilde{S}_m}{(\widetilde{S}_m)_{t=\infty}} = \frac{4\,a}{P\alpha\,(1+\nu)\,(1-2\,\nu)}\,\widetilde{S}_m\,. \tag{264}$$

Aus (259) ergibt sich

$$\widetilde{S}^* = 1 - \frac{4\,(1-\nu)}{\pi\,(1-2\,\nu)}\int_0^\infty \Big[\mathrm{Erfc}\left(p\sqrt{t^*}\right) - \frac{\nu}{1-\nu}\,e^{-\frac{1-2\,\nu}{(1-\nu)^2}p^2 t^*}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\nu}{1-\nu}p\,\sqrt{t^*}\right)\Big]\frac{\sin p}{p^2}J_1(p)\,dp\,. \tag{265}$$

In Abb. 5 und 6 ist $\widetilde{S}^*$ gemäß (265) in Abhängigkeit von der dimensionslosen Zeit t^* nach (209) für verschiedene Werte von ν dargestellt (strichlierte Linien). Man erkennt durch Vergleich mit den voll ausgezogenen Kurven für S_m^*, daß auch die zeitlichen Verläufe der bezogenen mittleren Nachsetzungen für die beiden Grenzfälle des absolut nachgiebigen und des absolut starren Stempels nicht wesentlich voneinander abweichen.

(Eingegangen am 19. Juni 1960.)

Anschrift der Verfasser: o. Prof. Dr. *G. Heinrich* und Doz. Dr. *K. Desoyer*, Wien IV., Karlsplatz 13, Technische Hochschule.

Einige Auswerteverfahren bei spannungsoptischen Plattenuntersuchungen

Von G. Haberland

1. Einleitung. Mit Hilfe des Zweischichtenverfahrens oder des Reflexionsverfahrens lassen sich bei elastischen Platten spannungsoptisch die maximalen Torsionsmomente (d. h. die Differenzen der Hauptbiegungsmomente) und die Richtungen der Hauptbiegungsmomente messen. Zur Bestimmung der einzelnen Biegungsmomente können rechnerische Auswerteverfahren herangezogen werden. Es wird gezeigt, daß sich praktisch alle für Scheiben bekannten Auswertemöglichkeiten auch bei Platten, die innerhalb der *Kirchhoff*schen Bedingungen auf Biegung beansprucht werden, ableiten lassen, sofern man — im Gegensatz zu den Scheiben — nicht von den Gleichgewichtsbeziehungen, sondern von den Formänderungsbeziehungen ausgeht. In der Durchführung der Auswertung besteht kein prinzipieller Unterschied zwischen Scheiben und Platten.

Unter dem Begriff „Platte" verstehen wir einen ebenen Flächenträger, dessen Dicke im Vergleich zu den übrigen Abmessungen des Körpers klein ist und der einer Belastung unterworfen ist, die eine Krümmung der ursprünglich ebenen Mittelfläche hervorruft.

Wir beschränken uns dabei auf solche Kräfte, die in Richtung der Plattennormalen angreifen. Die Angriffspunkte dieser Kräfte denkt man sich in die Plattenmittelfläche verlegt. Denselben Körper bezeichnen wir dann als „Scheibe", wenn er nur durch Kräfte in seiner Ebene beansprucht wird und seine Mittelfläche bei der Verformung eben bleibt.

2. Grundlagen. Für ein rechtwinkliges Plattenelement, welches so in einem rechtwinkligen Koordinatensystem (x, y, z) liegen möge, daß die unverformte Plattenmittelfläche und die (x, y)-Ebene zusammenfallen, gelten folgende drei Gleichgewichtsbeziehungen zwischen den Biegungsmomenten M_x, M_y, den Torsionsmomenten T_{xy}, den Querkräften Q_{xz}, Q_{yz} und der Belastungsfunktion[1] $P(x, y)$:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = Q_{xz}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = Q_{yz}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + P(x, y) = 0. \tag{3}$$

Weitere Gleichungen zur Bestimmung der fünf unbekannten Funktionen M_x, M_y, T_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz} gewinnt man aus den Beziehungen, die zwischen den Spannungen und den Verformungen eines elastischen Körpers bestehen (*Hooke*sches Gesetz) sowie aus bestimmten vereinfachenden Annahmen über den Verformungszustand (*Kirchhoff*sche Bedingungen). Diese Annahmen bestehen darin, daß im Falle einer im Verhältnis zu den Längsabmessungen kleinen Plattenhöhe h und einer im Vergleich zu h kleinen Durchbiegung w diese als unabhängig von z angesehen wird und alle Punkte einer Normalen zur Plattenmittelfläche auch nach der Verformung noch auf einer Geraden, der Normalen zur verformten Mittelebene, liegen. Das bedeutet eine Vernachlässigung der durch die Schubspannungen τ_{xz} und τ_{yz} hervorgerufenen Verformungen.

Für die Verschiebungen u, v gelten somit die Beziehungen

$$u = -z\,\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad v = -z\,\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{4}$$

so daß man schließlich für die Verzerrungskomponenten folgende Ausdrücke erhält:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2\,z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] Im allgemeinen ist es in der Plattentheorie üblich, die Belastungsfunktion mit $p(x, y)$ zu bezeichnen. Wir verwenden dafür die Bezeichnung $P(x, y)$, da wir den Buchstaben p später noch anderweitig verbrauchen.

Die Verzerrungskomponenten sind durch das *Hooke*sche Gesetz mit den Normalspannungen σ_x und σ_y bzw. den Schubspannungen τ_{xy} verknüpft:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\,\sigma_y)\,, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\,\sigma_x)\,, \quad \gamma_{xy} = \frac{2\,(1+\mu)}{E}\,\tau_{xy}\,. \tag{6}$$

Darin bedeuten μ die *Poisson*sche Konstante ($\mu < 0{,}5$) und E den Elastizitätsmodul. Die Normalspannung σ_z wurde neben σ_x und σ_y vernachlässigt.

Für die Spannungen folgen aus (5) und (6) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\mu^2}\,z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\mu^2}\,z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\mu}\,z\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Die auf die Längeneinheit bezogenen Biegungsmomente M_x, M_y und die Torsionsmomente T_{xy} ergeben sich nun auf folgende Weise:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x\,z\,dz = -B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y\,z\,dz = -B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ T_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy}\,z\,dz = -(1-\mu)\,B\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Darin bedeutet

$$B = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\mu^2)}$$

die Biegungssteifigkeit.

Zwischen den örtlichen Ableitungen der Biegungsmomente und der Torsionsmomente besteht danach bei Platten mit konstanter Biegungssteifigkeit folgender Zusammenhang:

$$\frac{\partial(M_x - \mu\,M_y)}{\partial y} = (1+\mu)\,\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \tag{9}$$

und

$$\frac{\partial(M_y - \mu\,M_x)}{\partial x} = (1+\mu)\,\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\,. \tag{10}$$

Führen wir noch die Ersatzmomente m_x und m_y ein, die folgendermaßen definiert werden:

$$m_x = -(1-\mu^2)\,B\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_x - \mu\,M_y\,, \tag{11}$$

$$m_y = -(1-\mu^2)\,B\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = M_y - \mu\,M_x\,, \tag{12}$$

dann können wir an Stelle von (9) und (10) schreiben

$$\frac{\partial m_x}{\partial y} = (1+\mu)\,\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}\,, \tag{13}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} = (1+\mu)\,\frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\,. \tag{14}$$

Diese Gleichungen werden allen unseren weiteren Betrachtungen, die die vollständige Bestimmung des Biegespannungszustandes aus spannungsoptisch bestimmbaren Größen zum Ziele haben, zugrundegelegt. In der Form entsprechen diese Gleichungen den Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Spannungszustandes und werden auch entsprechend gehandhabt, ihrem Inhalt nach sind sie aber wesentlich von jenen verschieden. Um dies deutlich werden zu lassen, wurden hier noch einmal die Grundlagen der klassischen Plattentheorie kurz aufgezeigt.

Während die Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Spannungszustandes wie auch die hier angegebenen Plattengleichgewichtsbeziehungen (1) bis (3) — abgesehen von der Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung — immer streng gelten, liegen den Gleichungen (13) und (14) die in der klassischen Plattentheorie üblichen Annahmen über den Verformungszustand zugrunde. Die Möglichkeit, die ersten Ableitungen der Biegungs- und Torsionsmomente miteinander zu verknüpfen, beruht auf den Gleichungen (4); denn aus ihnen folgt, daß man für die Verzerrungen bei Platten schreiben kann

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y}. \tag{15}$$

Ohne die Gleichungen (4) wäre erst eine Verknüpfung der zweiten Ableitungen der Verzerrungen möglich, was zu keiner für spannungsoptische Zwecke brauchbaren Beziehung führt.

Ebenso können wir die Gleichgewichtsbeziehungen (1) und (2) nicht unmittelbar benutzen, da sie ja die unbekannten Querkräfte enthalten, die sich durch Einsetzen der Gleichungen (8) erst formelmäßig aus diesen Gleichgewichtsbeziehungen ergeben.

Wir dürfen uns also nicht darüber hinwegtäuschen, daß bei den hier beschriebenen spannungsoptischen Untersuchungsmöglichkeiten elastischer Platten die gleichen — streng genommen unzulänglichen — Voraussetzungen enthalten sind, die auch einer theoretischen Behandlung nach der klassischen *Kirchhoff*schen Theorie zugrundeliegen. Das ist aber auch bei vielen anderen experimentellen Verfahren der Fall, z. B. dann, wenn die Biegungsmomente aus Krümmungsmessungen nach (8) ermittelt werden.

Der Zusammenhang zwischen den Momenten verschiedener Schnittrichtungen wird in bekannter Weise durch den *Mohr*schen Momentenkreis veranschaulicht. Insbesondere stehen die Biegungsmomente M_x, M_y sowie das Torsionsmoment T_{xy} in folgendem Zusammenhang mit den Hauptbiegungsmomenten M_1, M_2:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_1 \cos^2\varphi + M_2 \sin^2\varphi\,, \\ M_y &= M_1 \sin^2\varphi + M_2 \cos^2\varphi\,, \\ T_{xy} &= \frac{(M_1 - M_2)}{2} \sin 2\varphi\,, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

worin mit φ der Winkel gemeint ist, den die Richtung des Hauptbiegungsmomentes M_1 mit der x-Achse bildet.

$\frac{1}{2}(M_1 - M_2)$ bedeutet das maximale Torsionsmoment T_{max}. Führen wir außerdem

$$M_1 + M_2 = p \quad \text{und} \quad M_1 - M_2 = 2\,T_{max} = q \tag{17}$$

ein, dann lassen sich die Gleichungen (16) auch folgendermaßen schreiben:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{p}{2} + \frac{q}{2}\cos 2\varphi\,, \\ M_y &= \frac{p}{2} - \frac{q}{2}\cos 2\varphi\,, \\ T_{xy} &= T_{max}\sin 2\varphi = \frac{q}{2}\sin 2\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Für die Ersatzmomente m_x, m_y in (11) und (12) können wir mit (18) schreiben

$$\left.\begin{aligned} m_x &= (1-\mu)\frac{p}{2} + (1+\mu)\frac{q}{2}\cos 2\varphi\,, \\ m_y &= (1-\mu)\frac{p}{2} - (1+\mu)\frac{q}{2}\cos 2\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Setzen wir noch (19) und die dritte Gleichung (18) in (13) und (14) ein, dann ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\sin 2\varphi - \frac{\partial q}{\partial y}\cos 2\varphi + 2q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos 2\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\sin 2\varphi\right)\right], \tag{20}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\cos 2\varphi + \frac{\partial q}{\partial y}\sin 2\varphi + 2q\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sin 2\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos 2\varphi\right)\right]. \tag{21}$$

3. Die spannungsoptischen Meßgrößen. Da die Biegungsspannungen nach dem Geradliniengesetz [vgl. (7)] über die Plattenhöhe verteilt sind, kann eine homogene Platte bei einer Beobachtung im polarisierten Licht keinen spannungsoptischen Effekt zeigen. Die Spannungen haben zu beiden Seiten der neutralen Fläche verschiedene Vorzeichen, so daß die optischen Gangunterschiede in der Summe Null ergeben. Man erhält aber ein spannungsoptisch beobachtbares Bild, wenn man die Modellplatte aus zwei Schichten verschiedenen Materials mit unterschiedlicher spannungsoptischer Wirksamkeit zusammenklebt (Zweischichtenverfahren) oder aber in die Plattenmittelfläche eine reflektierende Schicht einklebt und die Platte im reflektierten Licht beobachtet (Reflexionsverfahren)[1]. In beiden Fällen erhält man Isochromaten, aus denen man die T_{max}-Werte ermittelt, und Isoklinen, die die Richtungen der Hauptbiegungsmomente angeben. Nach der letzten Gleichung (18) werden also die Torsionsmomente T_{xy} über die ganze Platte experimentell bestimmt.

Die Theorie der Zweischichtenplatte ist bereits in der Literatur ausführlich beschrieben worden, so daß hier nicht näher darauf eingegangen zu werden braucht[2,3,4,5,6]. Es soll hier der Hinweis genügen, daß wir für die Zweischichtenplatte lediglich resultierende elastische Konstanten anzunehmen haben, die sich aus den elastischen Konstanten und Dicken der einzelnen Schichten herleiten lassen, falls diese unterschiedlich sind. Die ermittelten Biegungs- und Torsionsmomente dürfen wir als einer homogenen Platte zugehörig betrachten (wodurch das Zweischichtenverfahren letzten Endes erst sinnvoll wird). *Favre*, *Gilg* und *Schumann* haben über verschiedene spannungsoptische Untersuchungen mit Hilfe des Zweischichtenverfahrens berichtet[7,8,9]. Da von ihnen die einzelnen Hauptbiegungsmomente direkt mit Hilfe eines Interferometers gemessen wurden, erübrigte sich bei ihnen die Anwendung eines Auswerteverfahrens zur Bestimmung der einzelnen Biegungsmomente. *Kuske* und *Hirschfeld* haben vorgeschlagen, Zweischichtenplatten als Ganzes zu beobachten, d. h. Isoklinen und Isochromaten aufzunehmen, so wie es bei Scheibenversuchen allgemein üblich ist[10,11], und was in der experimentellen Durchführung außerdem einfacher ist. Da aber hierbei nur die maximalen Torsionsmomente und die Richtungen der Hauptbiegungsmomente gemessen werden können, sind rechnerische Verfahren notwendig, um aus den Meßgrößen die einzelnen Biegungsmomente über die ganze Platte zu bestimmen. Der Wiedergabe einer Reihe derartiger Auswerteverfahren sind die folgenden Abschnitte gewidmet. Die erforderlichen Grundlagen dazu sind bereits im vorigen Abschnitt entwickelt worden.

4. Die Bestimmung der einzelnen Biegungsmomente längs geradliniger Wege. Diese Auswertung beruht auf einer unmittelbaren Anwendung der Gleichungen (13) und (14). Sie entspricht in ihrer Durchführung dem bei Scheiben üblichen Schubspannungsdifferenzenverfahren, welches auf den Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Spannungszustandes aufbaut. Sollen die Biegungsmomente über die ganze Platte bestimmt werden, dann ist es zweckmäßig, die Torsionsmomente T_{xy} für hinreichend viele Schnitte $x = \text{konst.}$ bzw. $y = \text{konst.}$ aufzutragen und diese Kurven graphisch zu differentiieren. Die Bestimmung der Ersatzmomente m_x und m_y im Innern der Platte erfolgt dann durch Integration der örtlichen Änderungen der Torsionsmomente längs geradliniger Wege von Randpunkten P_0 bzw. P_0' aus, in denen die Ersatzmomente aus den jeweiligen Randbedingungen bekannt sind:

$$(m_x)_P = (1+\mu)\int_{P_0}^{P} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x}\,dy + (m_x)_{P_0}, \tag{22}$$

$$(m_y)_P = (1+\mu)\int_{P_0'}^{P} \frac{\partial T_{xy}}{\partial y}\,dx + (m_y)_{P_0'}. \tag{23}$$

---

[1] *J. N. Goodier* u. *G. H. Lee*, J. Appl. Mech. 8 (1941) S. A 27. Dazu Diskussionsbeitrag von R. D. Mindlin, J. Appl. Mech. 8 (1941) S. A 187.

[2] *H. Favre* u. *B. Gilg*, Schweizerische Bauztg. 68 (1950) S. 253 und S. 265.

[3] *B. Gilg*, Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten. Diss. E. T. H. Zürich 1952 (Publication No. 5 du Laboratoire de Photoélasticité de l'École Polytechnique Fédérale, Zürich 1952).

[4] В. И. Королев, Инженерный сборник 22 (1955), S. 98.

[5] *G. Haberland*, Przegląd Mechaniczny 19 (1960) S. 120 und S. 153.

[6] *H. Schwieger* u. *G. Haberland*, Z. angew. Math. Mech. 39 (1959) S. 85.

[7] Siehe Fußnote 2 von Seite 257.

[8] Siehe Fußnote 3 von Seite 257.

[9] *H. Favre* u. *W. Schumann*, Étude expérimentale de la répartition des moments dans une plaque oblique fléchie en fonction de l'angle par les côtés. Bulletin Nr. 9 de la Société Française des Mécaniciens (1953).

[10] *A. Kuske*, Z. VDI 94 (1952) S. 745.

[11] *K. Hirschfeld*, Bauingenieur 25 (1950) S. 455.

Bei der praktischen Anwendung dieser Gleichungen kann es mitunter auch angebracht sein, die Reihenfolge von Differentiation und Integration zu vertauschen; denn wir können ja $\partial/\partial x$ bzw. $\partial/\partial y$ auch vor das Integral setzen. Es kann also auch zuerst über die Torsionsmomente T_{xy} in der einen Richtung integriert werden, um erst hernach diese Integralwerte in der zur Integrationsrichtung senkrechten Richtung zu differentiieren.

Soll eine Platte vollständig ausgewertet werden, dann ist es zweckmäßig, zunächst einen Schichtenplan für die Torsionsmomente T_{xy} zu zeichnen, was auch graphisch erfolgen kann mit Hilfe des *Mohr*schen Kreises entsprechend der Konstruktion des „Schubspannungshügels" bei Scheibenversuchen, wie es *Kuske* vorgeschlagen hat[1].

Es genügt, ein Ersatzmoment, z. B. m_y, durch Integration zu bestimmen. Man erhält dann m_x gemäß (19) und (17) aus der Beziehung

$$m_x = m_y + 2\,(1+\mu)\,T_{max}\cos 2\varphi\,. \tag{24}$$

Die Biegungsmomente M_x und M_y erhält man folgendermaßen aus den Ersatzmomenten [vgl. (11) und (12)]:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{1-\mu^2}\,(m_x + \mu\, m_y)\,,\\ M_y &= \frac{1}{1-\mu^2}\,(m_y + \mu\, m_x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Dieses Verfahren wurde zuerst von *Schwieger* vorgeschlagen[2]. Es hat sich inzwischen bei verschiedenen Plattenuntersuchungen bewährt[3,4]. Es wird wohl auch dasjenige Verfahren sein, dem vor den anderen Auswertemöglichkeiten in vielen Fällen der Vorzug zu geben sein wird.

Dieses Verfahren läßt sich auch leicht auf Platten mit veränderlicher Dicke erweitern. Die Verknüpfung der Ersatzmomente m_x und m_y mit dem Torsionsmoment T_{xy} führt hierbei, wie man aus (8), (11) und (12) leicht findet, zu den Ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{m_x}{B}\right) &= (1+\mu)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_{xy}}{B}\right),\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{m_y}{B}\right) &= (1+\mu)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_{xy}}{B}\right). \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die Ersatzmomente im Punkte P ergeben sich wieder durch Integration von den Randpunkten P_0 bzw. P_0' aus:

$$\left.\begin{aligned} (m_x)_P &= (1+\mu)\,B_P \int_{P_0}^{P} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_{xy}}{B}\right) dy + B_P \left(\frac{m_x}{B}\right)_{P_0},\\ (m_y)_P &= (1+\mu)\,B_P \int_{P_0'}^{P} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T_{xy}}{B}\right) dx + B_P \left(\frac{m_y}{B}\right)_{P_0'}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Als Anwendung wurden die Biegungsmomente einer Kragplatte mit linearer veränderlicher Dicke bestimmt[5].

5. Die Bestimmung der Momentensumme längs beliebiger Integrationswege. Zur Bestimmung der Momentensumme durch Integration längs eines beliebigen Weges sind im Prinzip schon die Gleichungen (20) und (21) geeignet. Da die Orientierung der (x, y)-Achsen in der Plattenmittelfläche zunächst beliebig gewählt werden kann, müssen gleichartige Beziehungen entstehen, wenn wir an Stelle von x, y das orthogonale, aber sonst beliebig in der Plattenmittelfläche liegende System ξ, η einführen, wobei dann an Stelle von φ der beliebig veränderliche Winkel δ tritt, den die Richtung ξ mit der Richtung des Hauptbiegungsmomentes M_1 bildet. Wir wollen die Gleichungen (20) und (21) in diesem Sinne umschreiben, da es für die Anschauung bequemer ist, das einmal festgelegte Koordinatensystem x, y feststehen zu lassen.

---

[1] *A. Kuske*, Forsch. auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 18 (1952) S. 113.

[2] *H. Schwieger*, Bauplanung und Bautechnik 8 (1954) S. 174 und Wiss. Z. Univ. Halle, Math. Nat. 4 (1954) S. 249.

[3] *H. Schwieger* u. *G. Haberland*, Bauplanung und Bautechnik 8 (1954) S. 358 und Wiss. Z. Univ. Halle, Math. Nat. 4 (1954) S. 253.

[4] Siehe Fußnote 5 von Seite 257.

[5] Siehe Fußnote 6 von Seite 257.

Es seien s_1 und s_2 die Richtungen der Hauptbiegungsmomente M_1 und M_2, die mit dem x, y-System den Winkel φ bilden, ϑ der beliebig veränderliche Winkel, den die Richtung ξ mit der x-Achse bildet, η sei die zu ξ senkrechte Richtung. Der Winkel δ zwischen ξ und s_1 ist dann (Abb. 1)

$$\delta = \vartheta - \varphi \,. \tag{28}$$

Abb. 1. Bezeichnungen zur Integration längs eines beliebigen Weges.

Wir beziehen zunächst die Gleichungen (13) und (14) auf die Richtungen[1] ξ, η. Es ist

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial m_x}{\partial y} &= \frac{\partial m_x}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial m_x}{\partial \xi}\sin\vartheta + \frac{\partial m_x}{\partial \eta}\cos\vartheta \,, \\
\frac{\partial m_y}{\partial x} &= \frac{\partial m_y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial m_y}{\partial \xi}\cos\vartheta - \frac{\partial m_y}{\partial \eta}\sin\vartheta \,, \\
\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\cos\vartheta - \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\sin\vartheta \,, \\
\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\sin\vartheta + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\cos\vartheta \,.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (13) und (14) ein, dann ergibt sich

$$\frac{\partial m_x}{\partial \xi}\sin\vartheta + \frac{\partial m_x}{\partial \eta}\cos\vartheta - (1+\mu)\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\cos\vartheta - \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\sin\vartheta\right) = 0 \,, \tag{30}$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial \xi}\cos\vartheta - \frac{\partial m_y}{\partial \eta}\sin\vartheta - (1+\mu)\left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial \xi}\sin\vartheta + \frac{\partial T_{xy}}{\partial \eta}\cos\vartheta\right) = 0 \,. \tag{31}$$

Setzen wir für die Ersatzmomente m_x, m_y die Gleichungen (19) und für die Torsionsmomente T_{xy} die dritte Gleichung (18) ein, dann erhalten wir zwei Beziehungen, von denen wir einmal die erste mit $\sin\vartheta$, die zweite mit $\cos\vartheta$ multiplizieren und addieren. Zum andern multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\cos\vartheta$ und die zweite mit $-\sin\vartheta$ und addieren ebenfalls. Unter Berücksichtigung von (28) erhalten wir als Ergebnis die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial q}{\partial \xi}\cos 2\delta - \frac{\partial q}{\partial \eta}\sin 2\delta + 2q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\sin 2\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\cos 2\delta\right)\right], \tag{32}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[-\frac{\partial q}{\partial \xi}\sin 2\delta - \frac{\partial q}{\partial \eta}\cos 2\delta + 2q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\cos 2\delta - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\sin 2\delta\right)\right]. \tag{33}$$

Auf den rechten Seiten dieser Ausdrücke stehen nur spannungsoptisch bestimmbare Größen. Diese Gleichungen sind gleichbedeutend mit einem Hineindrehen der Richtungen x, y in die beliebigen Richtungen ξ, η; denn sie gehen aus (20) und (21) mit $dx \to d\xi$, $dy \to d\eta$ und $\varphi = -\delta$ hervor.

Ist $\partial q/\partial \xi = 0$, so fällt die Richtung ξ mit einer Isochromate zusammen. Im Falle $\partial \varphi/\partial \xi = 0$ fällt die Richtung ξ mit einer Isokline zusammen.

[1] Hier sowie in den folgenden Abschnitten beschränken wir uns auf Platten mit konstanter Dicke und gehen deshalb von den Gleichungen (13) und (14) aus. Handelt es sich um Platten mit veränderlicher Dicke, d. h. mit ortsveränderlicher Biegungssteifigkeit B, dann hat man bei der Ableitung der einzelnen Auswertemethoden von (26) auszugehen.

Mitunter mag es zweckmäßig sein, die Ableitungen von q und φ nach s_1 bzw. s_2 einzuführen, was wir noch tun wollen. Es ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \xi} &= \frac{\partial q}{\partial s_1}\cos\delta + \frac{\partial q}{\partial s_2}\sin\delta\,, \\ \frac{\partial q}{\partial \eta} &= -\frac{\partial q}{\partial s_1}\sin\delta + \frac{\partial q}{\partial s_2}\cos\delta\,, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\cos\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\sin\delta\,, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\sin\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\cos\delta\,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (32) ein, dann erhalten wir

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial q}{\partial s_1}\cos\delta - \frac{\partial q}{\partial s_2}\sin\delta + 2\,q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\sin\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\cos\delta\right)\right]. \tag{35}$$

Wir integrieren diese Gleichung zwischen den Punkten 0 und 1 und erhalten

$$p_1 - p_0 = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\int_0^1\left(\frac{\partial q}{\partial s_1}\cos\delta - \frac{\partial q}{\partial s_2}\sin\delta\right)d\xi + 2\int_0^1 q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\sin\delta + \frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\cos\delta\right)d\xi\right] \tag{36}$$

oder

$$p_1 - p_0 = \frac{1+\mu}{1-\mu}\int_0^1\left[\sin\delta\left(-\frac{\partial q}{\partial s_2} + 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right) + \cos\delta\left(\frac{\partial q}{\partial s_1} + 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right)\right]d\xi\,. \tag{36a}$$

Das analoge Auswerteverfahren für Scheiben wurde von *Föppl* angegeben[1].

Auch die Einführung der Ableitungen von q und φ nach irgendwelchen anderen ausgezeichneten Richtungen in (32) und (33) kann mitunter angebracht sein [vgl. dazu die späteren Gleichungen (95) und (96)].

6. Die Integration längs einer Hauptbiegungsmomentenlinie. Bei Scheiben ist auch das Verfahren gebräuchlich, die einzelnen Hauptspannungen durch Integration längs der Hauptspannungslinien zu ermitteln. Dazu geht man von den auf die Hauptspannungsrichtungen bezogenen Gleichgewichtsbeziehungen aus. Der diesem Verfahren analogen Auswertung bei Platten wollen wir uns jetzt zuwenden. Die dazu erforderlichen Beziehungen gehen als Spezialfälle aus (32) und (33) hervor.

Es falle ξ in die s_1-Richtung, η in die s_2-Richtung. Setzen wir also

$$d\xi \to ds_1\,, \quad d\eta \to ds_2\,, \quad \delta = 0$$

in (32) und (33) ein, dann ergibt sich

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial q}{\partial s_1} + 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\right), \tag{37}$$

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\frac{\partial q}{\partial s_2} + 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\right). \tag{38}$$

Setzen wir gemäß (17) für p wieder die Momentensumme, für q ihre Differenz ein, dann wird aus (37)

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(M_2 - \mu\,M_1) = (1+\mu)(M_1 - M_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \tag{39}$$

und aus (38)

$$\frac{\partial}{\partial s_2}(M_1 - \mu\,M_2) = (1+\mu)(M_1 - M_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\,. \tag{40}$$

Mit Einführung der Hauptersatzmomente

$$m_1 = M_1 - \mu\,M_2\,, \qquad m_2 = M_2 - \mu\,M_1 \tag{41}$$

wird daraus

$$\frac{\partial m_2}{\partial s_1} = (1+\mu)(M_1 - M_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} \tag{42}$$

und

$$\frac{\partial m_1}{\partial s_2} = (1+\mu)(M_1 - M_2)\,\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\,. \tag{43}$$

[1] *L. Föppl*, Z. angew. Math. Mech. 34 (1954) S. 454.

Für die praktische Verwendung ist es mitunter vorteilhaft, diese Gleichungen in Differenzenform zu schreiben:

$$\Delta m_2 = (1+\mu)\,(M_1 - M_2)\,\frac{\Delta s_1\,\Delta\varphi}{\Delta s_2}\,, \tag{44}$$

$$\Delta m_1 = (1+\mu)\,(M_1 - M_2)\,\frac{\Delta s_2\,\Delta\varphi}{\Delta s_1}\,. \tag{45}$$

Die Bedeutung der einzelnen Größen ist aus Abb. 2 ersichtlich. Gleichung (44) gilt für ein Fortschreiten von A nach B, Gleichung (45) für ein Fortschreiten von A nach C. Als Ausgang der Integration hat man einen Plattenpunkt zu wählen, in dem $M_1 - M_2$ bekannt ist. Dieser Punkt wird gewöhnlich am Plattenrande liegen.

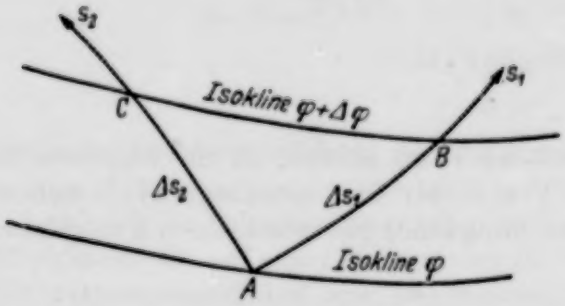

Abb. 2. Dreieckiges Plattenelement, gebildet aus Isokline und Hauptbiegungsmomentenlinien.

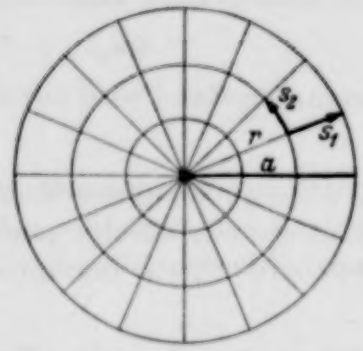

Abb. 3. Trajektorien der Hauptbiegungsmomente bei einer rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatte.

7. Die Auswertung bei rotationssymmetrisch belasteten und gelagerten Kreisplatten. Im Falle einer zentrisch oder rotationssymmetrisch belasteten und längs des Umfanges gleichförmig gestützten Kreisplatte mit dem Halbmesser a sind die Hauptbiegungsmomentenlinien die konzentrischen Kreise um den Plattenmittelpunkt und die Radialstrahlen. Wir bezeichnen die Richtungen der Hauptbiegungsmomente $M_1 = M_r$ mit s_1, die der Hauptbiegungsmomente $M_2 = M_\varphi$ mit s_2 (Abb. 3). Für diesen Fall geht die Beziehung (42) wegen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{r} \qquad \text{und} \qquad ds_1 = dr \tag{46}$$

(ϱ_2 ist der Krümmungshalbmesser der s_2-Linie) über in

$$\frac{\partial m_2}{\partial r} = (1+\mu)\,\frac{(M_1 - M_2)}{r}\,. \tag{47}$$

Durch Integration vom Rande aus folgt

$$(M_2 - \mu\, M_1)_{a-r} = (m_2)_{a-r} = (1+\mu)\int_a^{a-r} \frac{M_1 - M_2}{r}\,dr + (m_2)_a\,. \tag{48}$$

Eine Differentiation gemessener Größen entfällt somit in diesem Falle, da die Krümmungen der Hauptbiegungsmomentenlinien durch die Rotationssymmetrie gegeben sind.

Die einzelnen Hauptbiegungsmomente ergeben sich nun leicht folgendermaßen:

$$M_1 = M_r = \frac{m_2 + q}{1-\mu} \qquad \text{und} \qquad M_2 = M_\varphi = \frac{m_2 + \mu\, q}{1-\mu} \qquad \text{mit} \qquad q = M_1 - M_2\,. \tag{49}$$

Im Plattenmittelpunkt ist $M_1 = M_2$, d. h. $q = 0$. Aus (48) und (49) ergibt sich für die dortigen Hauptbiegungsmomente

$$(M_1)_{r=0} = (M_2)_{r=0} = \frac{(m_2)_{r=0}}{1-\mu} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\int_{r=a}^{0} \frac{M_1 - M_2}{r}\,dr + \frac{(m_2)_{r=a}}{1-\mu}\,, \tag{50}$$

wobei zu beachten ist, daß $(M_1 - M_2)/r$ selbst in diesem Punkte unbestimmt wird.

Der Randwert $(m_2)_{r=a}$ ergibt sich aus den Randbedingungen. Sie lauten für einen frei drehbar aufliegenden Rand

$$w_{r=a} = 0 \qquad \text{und} \qquad (M_r)_{r=a} = 0 \tag{51}$$

und für einen eingespannten Rand

$$w_{r=a} = 0 \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 . \tag{52}$$

Für die Biegungsmomente einer rotationssymmetrisch belasteten Kreisplatte gelten die Ausdrücke

$$M_r = M_1 = -B\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \qquad M_\varphi = M_2 = -B\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right). \tag{53}$$

Das Ersatzmoment m_2 wird also

$$m_2 = M_2 - \mu M_1 = -B(1-\mu^2)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} . \tag{54}$$

Für den frei aufliegenden Rand erhalten wir wegen $(M_1)_{r=a} = 0$

$$(m_2)_{r=a} = (M_2)_{r=a} = -q_{r=a} = -2\,(T_{max})_{r=a} . \tag{55}$$

Am eingespannten Rand wird mit der Randbedingung (52)

$$(m_2)_{r=a} = 0 . \tag{56}$$

Auf die richtige Wahl der Vorzeichen ist besonders zu achten, da die Differenz der Hauptbiegungsmomente nur absolut gemessen wird. Von dieser Auswertemöglichkeit haben *Schwieger* und *Reimann* bei der spannungsoptischen Untersuchung einer quergestoßenen Kreisplatte Gebrauch gemacht[1].

8. Die Integration längs einer Haupttorsionsmomentenlinie. Ein weiteres bei Scheiben übliches Auswerteverfahren beruht auf der Bestimmung der Spannungssumme durch Integration längs der Hauptschubspannungslinien. Ganz analog läßt sich bei Platten die Momentensumme durch Integration längs der Haupttorsionsmomentenlinien bestimmen, wie jetzt gezeigt werden soll. Bekanntlich bilden die Richtungen der Haupttorsionsmomente mit den Richtungen der Hauptbiegungsmomente in jedem Plattenpunkte einen Winkel von 45°, so daß man das orthogonale Trajektorienetz der Haupttorsionsmomente sofort aus dem der Hauptbiegungsmomente gewinnen kann.

Bezeichnen wir die Richtungen der Haupttorsionsmomente mit t_1 und t_2 und die zugehörigen Linienelemente mit dt_1 und dt_2 (Abb. 4). Wir gehen wieder von den allgemeinen Gleichungen (32) und (33) aus und lassen ξ mit der t_1-Richtung, η mit der t_2-Richtung zusammenfallen, setzen also

$$d\xi \to dt_1 , \qquad d\eta \to dt_2 , \qquad \delta = 45°$$

in (32) und (33) ein. Es folgt

$$\frac{\partial p}{\partial t_1} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\frac{\partial q}{\partial t_2} + 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial t_1}\right), \tag{57}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t_2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\frac{\partial q}{\partial t_1} - 2\,q\,\frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right). \tag{58}$$

Für eine praktische Verwendung schreibt man diese Gleichungen in folgender Differenzenform:

$$\Delta_1 p = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\Delta_2 q\,\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} + 2\,q\,\Delta\varphi\right), \tag{59}$$

$$\Delta_2 p = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\Delta_1 q\,\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} - 2\,q\,\Delta\varphi\right). \tag{60}$$

Darin gilt Δ_1 für ein Fortschreiten von A nach B und Δ_2 für ein Fortschreiten von A nach C (Abb. 5).

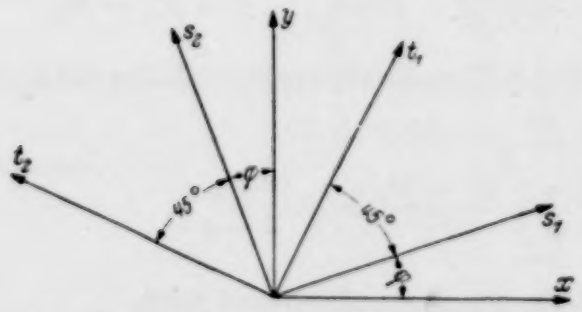

Abb. 4. Die Richtungen t_1 und t_2 der Haupttorsionsmomente.

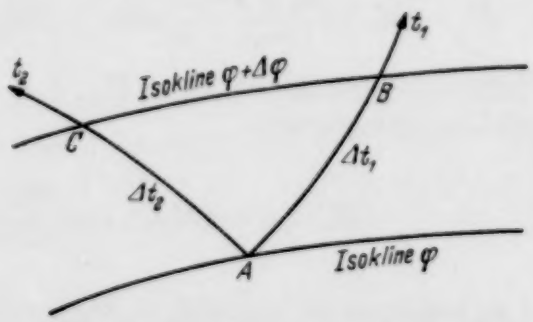

Abb. 5. Dreieckiges Element, gebildet aus Isokline und Haupttorsionsmomentenlinien.

[1] *H. Schwieger* u. *V. Reimann*, Z. angew. Math. Mech. 39 (1959) S. 198.

Die Gleichungen (59) und (60) sind dann den Gleichungen (44) und (45) vorzuziehen, wenn die Isokline mit der s_1-Richtung einen sehr kleinen Winkel bildet, so daß das Dreieck in Abb. 2 äußerst langgestreckt wird und umgekehrt.

Zwischen den Größen $\frac{\partial p}{\partial t_1}, \frac{\partial p}{\partial t_2}, \frac{\partial p}{\partial s_1}, \frac{\partial p}{\partial s_2}$ besteht noch folgender Zusammenhang:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t_1} &= \frac{\partial p}{\partial s_1}\cos 45^\circ + \frac{\partial p}{\partial s_2}\sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\partial p}{\partial s_1} + \frac{\partial p}{\partial s_2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial t_2} &= -\frac{\partial p}{\partial s_1}\sin 45^\circ + \frac{\partial p}{\partial s_2}\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(-\frac{\partial p}{\partial s_1} + \frac{\partial p}{\partial s_2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial s_1} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t_1} - \frac{\partial p}{\partial t_2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial s_2} &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\partial p}{\partial t_1} + \frac{\partial p}{\partial t_2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

9. Ein weiteres Auswerteverfahren zur Bestimmung der Momentensumme. Das Verfahren zur Bestimmung der Momentensumme, das jetzt beschrieben werden soll, stellt das Analogon dar zu einem von *L. Föppl* für Scheiben angegebenen Verfahren. Für Scheiben sind dieses Verfahren sowie die Verfahren, die auf einer Integration in Richtung der Hauptspannungslinien bzw. der Hauptschubspannungslinien beruhen, in zusammenfassenden Darstellungen über Spannungsoptik beschrieben[1, 2, 3, 4].

Man geht davon aus, daß man den Winkel γ, den die Isokline mit der Hauptbiegungsmomentenrichtung s_1 bildet, beiderseits von s_2 aufträgt. Diese beiden neuen Richtungen werden mit s und t bezeichnet, die entsprechenden Linienelemente mit ds und dt (Abb. 6).

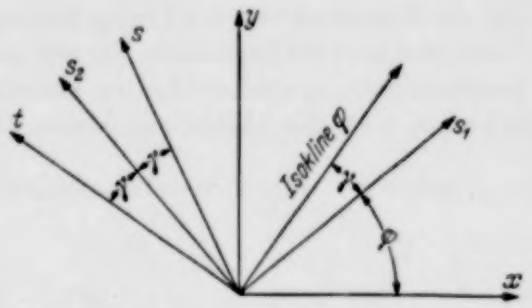

Abb. 6. Die Richtungen s und t zur Bestimmung der Momentensumme.

Wir multiplizieren nun (37) mit $\sin\gamma$, (38) mit $\cos\gamma$ und addieren beide:

$$\frac{\partial p}{\partial s_1}\sin\gamma + \frac{\partial p}{\partial s_2}\cos\gamma = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial q}{\partial s_1}\sin\gamma - \frac{\partial q}{\partial s_2}\cos\gamma\right) + \frac{1+\mu}{1-\mu}\,2\,q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s_2}\sin\gamma + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1}\cos\gamma\right). \tag{63}$$

Die linke Seite dieser Gleichung bedeutet aber $\partial p/\partial s$, der erste Klammerausdruck der rechten Seite ist gleichbedeutend mit $-\partial q/\partial t$. Der zweite Klammerausdruck schließlich muß verschwinden, da er die Änderung des Winkels φ längs der Isokline angibt, φ aber längs der Isokline konstant ist.

Wir erhalten somit

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial q}{\partial t}. \tag{64}$$

Mit Hilfe der (s, t)-Linien, die unmittelbar aus dem Isoklinenfeld gewonnen werden (die t-Linien stehen überall senkrecht auf den Isoklinen), kann somit die Momentensumme in s-Richtung erhalten werden, wenn man die Änderung der Hauptbiegungsmomentendifferenz in der t-Richtung ermittelt hat.

Einige Sonderfälle sollen noch erwähnt werden. Falls die Isokline die Hauptrichtung s_1 in einem Punkte berührt oder mit ihr längs einer Linie zusammenfällt, also $\gamma = 0$ wird (z. B. Symmetrieschnitt), fallen die Richtungen s und t mit der s_2-Richtung zusammen. Es wird dann aus (64)

$$\frac{\partial}{\partial s_2}(M_1 - \mu\, M_2) = \frac{\partial m_1}{\partial s_2} = 0, \tag{65}$$

was wir auch aus (43) mit $\partial\varphi/\partial s_1 = 0$ ablesen können.

---

[1] *G. Mesmer*, *Spannungsoptik*. Berlin 1939.

[2] *L. Föppl* u. *E. Mönch*, Praktische Spannungsoptik. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1. Aufl. 1950, 2. Aufl. 1959.

[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 258.

[4] Eine ausführliche Beschreibung der Integration längs einer Hauptspannungslinie bzw. Hauptschubspannungslinie findet man auch in *M. M. Frocht*, Photoelasticity, New York, Bd. I: 1941, Bd. II: 1948 und in *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 1, 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

Fällt die Hauptrichtung s_2 mit der Isokline zusammen, wird also $\gamma = 90°$, dann fällt die s-Richtung in die positive s_1-Richtung, die t-Richtung in die negative s_1-Richtung, und es folgt aus (64)

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(M_2 - \mu M_1) = \frac{\partial m_2}{\partial s_1} = 0\,, \tag{66}$$

was wieder aus (42) mit $\partial\varphi/\partial s_2 = 0$ folgt.

Aus der Gleichung der Isokline

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\sin\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\cos\gamma = 0 \tag{67}$$

entnimmt man, daß für beliebige Werte von γ die Beziehung

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\Big/\frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \tag{68}$$

besteht, wobei ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungshalbmesser der Hauptbiegungsmomentenlinien bedeuten. Insbesondere für $\gamma = 45°$ wird $\varrho_1 = \varrho_2$. Ist $\varrho_1 = \infty$ und $\gamma \neq 0°$, dann ist auch $\varrho_2 = \infty$ und umgekehrt für $\varrho_2 = \infty$ und $\gamma \neq 90°$ ist auch $\varrho_1 = \infty$. Ist der Krümmungshalbmesser einer Hauptbiegungsmomentenlinie unendlich, dann verläuft sie entweder geradlinig oder sie besitzt einen Wendepunkt.

10. Die Anwendung des Neuberschen Auswerteverfahrens bei Platten. *Neuber* hat ein Verfahren zur Konstruktion der Linien konstanter Spannungssumme bei Scheiben beschrieben[1], das sich auch für die Konstruktion der Linien konstanter Momentensumme bei Platten erweitern läßt. Man geht dazu von vier orthogonalen Netzen aus (Abb. 7). Es bedeuten s_1, s_2 wieder die Hauptbiegungsmomentenlinien, s_3 sind die Linien konstanter Momentensumme p, s_4 ist die dazu senkrechte Kurvenschar, s_5 sind die Linien q = konst. (Isochromaten), s_6 wieder die dazu senkrechten Linien, und schließlich s_7 und s_8 sind die Isoklinen und die zu ihnen orthogonalen Kurven. Die Bezeichnung der Winkel zwischen s_1 und den übrigen Richtungen ist aus Abb. 7 ersichtlich.

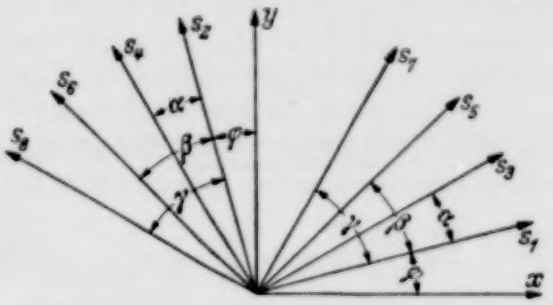

Abb. 7. Die Bezeichnungen für die Tangentenrichtungen und -winkel bei den vier orthogonalen Netzen zur Anwendung des Neuberschen Verfahrens.

Nun wird

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = \frac{\partial p}{\partial s_3}\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial s_4}\sin\alpha = -\frac{\partial p}{\partial s_4}\sin\alpha \tag{69}$$

und

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} = \frac{\partial p}{\partial s_3}\sin\alpha + \frac{\partial p}{\partial s_4}\cos\alpha = \frac{\partial p}{\partial s_4}\cos\alpha \tag{70}$$

wegen

$$\frac{\partial p}{\partial s_3} = 0\,.$$

Der Ausdruck $\partial p/\partial s_4$ stellt den als positiv angenommenen Gradienten von p dar. Beim Übergang von einer Linie p = konst. zur nächsten nehme p immer um den konstanten Betrag m_0 zu. Ist a der Abstand zwischen den Linien p = konst. und $p + m_0$ = konst., so gilt näherungsweise

$$\frac{\partial p}{\partial s_4} = \frac{m_0}{a}\,. \tag{71}$$

Es ist somit

$$\frac{\partial p}{\partial s_1} = -\frac{m_0}{a}\sin\alpha\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial s_2} = \frac{m_0}{a}\cos\alpha\,. \tag{72}$$

Nun ist definitionsgemäß auch

$$\frac{\partial q}{\partial s_5} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s_7} = 0\,,$$

so daß wir entsprechend (72) auch schreiben können

$$\frac{\partial q}{\partial s_1} = -\frac{m_0}{b}\sin\beta\,, \qquad \frac{\partial q}{\partial s_2} = \frac{m_0}{b}\cos\beta \tag{73}$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_1} = -\frac{\varepsilon}{c}\sin\gamma\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s_2} = \frac{\varepsilon}{c}\cos\gamma\,, \tag{74}$$

[1] *L. Föppl* u. *H. Neuber*, Festigkeitslehre mittels Spannungsoptik. München und Berlin 1935.

wobei q beim Übergang von einer Linie $q = \text{konst.}$ zur nächsten wieder um den konstanten Betrag m_0 und φ beim Übergang von einer Isokline zur nächsten um den Betrag ε zunehmen sollen. Der Abstand zweier q-Linien ist mit b, der Abstand zweier Isoklinen mit c bezeichnet. Es werden also Höhenschichtlinien von p und q betrachtet, auf denen p und q ganzzahlige vielfache Werte von m_0 annehmen, und Isoklinen, längs denen φ ein ganzzahliges Vielfaches von ε beträgt.

Die Ausdrücke (72), (73), (74) setzen wir in (37) und (38) ein und erhalten

$$\left.\begin{aligned} -\frac{m_0}{a}\sin\alpha &= \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\frac{m_0}{b}\sin\beta + 2\,q\,\frac{\varepsilon}{c}\cos\gamma\right), \\ \frac{m_0}{a}\cos\alpha &= \frac{1+\mu}{1-\mu}\left(-\frac{m_0}{b}\cos\beta - 2\,q\,\frac{\varepsilon}{c}\sin\gamma\right) \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

oder nach Multiplikation mit $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\frac{b\,c}{m_0}$

$$\left.\begin{aligned} -\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\frac{b\,c}{a}\sin\alpha &= -c\sin\beta + 2\,q\,\frac{\varepsilon\,b}{m_0}\cos\gamma, \\ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\frac{b\,c}{a}\cos\alpha &= -c\cos\beta - 2\,q\,\frac{\varepsilon\,b}{m_0}\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Mit den Abkürzungen

$$\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)\frac{b\,c}{a} = a' \qquad \text{und} \qquad 2\,q\,\frac{\varepsilon\,b}{m_0} = b' \tag{77}$$

wird daraus

$$a'\sin\alpha = c\sin\beta - b'\cos\gamma, \qquad a'\cos\alpha = -c\cos\beta - b'\sin\gamma. \tag{78}$$

Das sind zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten a' und α. Werden beide Gleichungen durcheinander dividiert, so erhält man

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b'\cos\gamma - c\,\sin\beta}{b'\sin\gamma + c\,\cos\beta}. \tag{79}$$

Durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen (78) folgt

$$a'^2 = b'^2 + c^2 - 2\,b'\,c\cos(\gamma + 90° - \beta). \tag{80}$$

Diese beiden Gleichungen haben die gleiche Form wie die von *Neuber* für Scheiben abgeleiteten Beziehungen. Die Bestimmung der p-Linien nach (79) und (80) erfolgt auf graphischem Wege, und zwar ganz analog wie bei Scheiben, so daß auf das Buch von *Föppl* und *Neuber* verwiesen werden kann.[1]

Bei Scheiben kommt der zu den Höhenschichtlinien der Spannungssumme orthogonalen Kurvenschar eine physikalische Bedeutung zu. Längs einer derartigen Linie ist nämlich dort die sogenannte Drehung

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{81}$$

konstant[2] (ω_z ist die z-Komponente eines axialen Vektors $\vec{\omega}$, der eine Drehung hervorruft, welche den Abstand zweier Punkte in erster Näherung ungeändert läßt). $E\,\omega_z$ kann als Imaginärteil einer komplexen Funktion aufgefaßt werden, deren Realteil dann die Spannungssumme darstellt[3, 4]. Spannungssumme und Drehung erfüllen die *Cauchy-Riemann*schen Differentialgleichungen und genügen beide der *Laplace*schen Differentialgleichung. Bei Platten entfällt diese Bedeutung der zu den Linien $M_1 + M_2 = \text{konst.}$ orthogonalen Kurven, da wegen der für u und v angenommenen Beziehungen (4) ω_z identisch Null wird und außerdem die Momentensumme an den Lastangriffsstellen nicht der Laplaceschen Differentialgleichung genügt.

Es ist ja, wie sich aus (1), (2), (3) und (8) ableiten läßt,

$$\Delta\left(\frac{M_x + M_y}{1+\mu}\right) = -P(x,y) \qquad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right). \tag{82}$$

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 264.
[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 264.
[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 260.
[4] Siehe Fußnote 1 von Seite 264.

Die Ausgangspunkte zur Konstruktion der Linien konstanter Momentensumme liegen am Rande, wo die Werte unmittelbar aus dem Isochromatenbild entnommen werden können unter Berücksichtigung der jeweils gültigen Randbedingungen. Einen Sonderfall bilden die frei drehbar aufliegenden Ränder. Dort verschwindet die Momentensumme längs des Randes (*Navier*sche Randbedingungen).

Aus den Randbedingungen läßt sich ebenfalls schon einiges über die Richtungen der Linien $p = \text{konst.}$ am Rande aussagen.

An einem geradlinigen, fest eingespannten Rande zum Beispiel haben die Isochromaten und die Linien $p = \text{konst.}$ gleiche Richtungen, d. h. es ist dort $\alpha = \beta$, wie folgende Überlegung zeigt.

An einem geradlinigen, eingespannten Rande $x = \text{konst.}$ gilt

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,. \tag{83}$$

Daraus folgt

$$M_x = -B\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = M_1 \qquad \text{und} \qquad M_y = -B\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu M_1 = M_2 \tag{84}$$

und somit

$$p = \frac{1+\mu}{1-\mu}\,q\,. \tag{85}$$

Der Rand hat die Richtung s_2. Wir können in Richtung des Randes differentiieren:

$$\frac{\partial p}{\partial s_2} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial q}{\partial s_2}\,. \tag{86}$$

Mit (72) und (73) wird daraus

$$\frac{m_0}{a}\cos\alpha = \frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{m_0}{b}\cos\beta\,. \tag{87}$$

Multiplikation mit $b\,c\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)$ und Berücksichtigung der Abkürzung (77) liefert

$$a'\cos\alpha = c\cos\beta\,. \tag{88}$$

Aus der zweiten Gleichung (78) folgt dann

$$a'\cos\alpha = c\cos\beta = -\frac{b'}{2}\sin\gamma\,. \tag{89}$$

Dividiert man jedes Glied der ersten Gleichung (78) durch einen dieser Ausdrücke, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta + 2\operatorname{ctg}\gamma\,. \tag{90}$$

Nun ist aber $\gamma = 90°$, also $\operatorname{ctg}\gamma = 0$, und daher ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha = \beta\,, \tag{91}$$

was wir zeigen wollten.

11. Weitere Möglichkeiten zur Konstruktion der Linien konstanter Momentensumme. Wie wir gesehen haben, bietet die Erweiterung des *Neuber*schen Verfahrens die Möglichkeit, die Linien konstanter Momentensumme bei Platten zu konstruieren. Für diejenigen p-Werte, die am Plattenrande auftreten und die demzufolge aus den Randbedingungen und den spannungsoptischen Meßwerten bekannt sind, kann der Verlauf der Linien $p = \text{konst.}$ beim Fortschreiten ins Innere der Platte nach (79) konstruiert werden. Die Werte auf diesen Linien sind also durch die Randwerte festgelegt. Zur Bestimmung der p-Werte auf denjenigen Linien $p = \text{konst.}$, die nicht auf den Rand stoßen, dient Gleichung (80).

Zum Abschluß sollen noch einige weitere Beziehungen angegeben werden, mit deren Hilfe die Ermittlung der Linien $p = \text{konst.}$ möglich ist.

Fällt in (35) die Richtung ξ mit der Richtung einer Linie $p = \text{konst.}$ zusammen, dann ist $\partial p/\partial\xi = 0$, und δ bedeutet den Winkel, den die Linie $p = \text{konst.}$ mit der Richtung s_1 des Hauptbiegungsmomentes M_1 bildet. Wir haben diesen Winkel mit α bezeichnet. Für ihn folgt aus (35)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\partial q}{\partial s_1} + 2\,q\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_2}}{\dfrac{\partial q}{\partial s_2} - 2\,q\dfrac{\partial\varphi}{\partial s_1}}\,. \tag{92}$$

Bequemer ist es oft, die Differentiation spannungsoptisch bestimmter Größen nach den Richtungen x, y vorzunehmen. Wir gehen deshalb von den Gleichungen (20) und (21) aus und schreiben sie zunächst in der Form

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\sin 2\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)\right],\\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\right].\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

Diese Gleichungen setzen wir in die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial p}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial p}{\partial y}\sin\vartheta,\\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} = -\frac{\partial p}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\vartheta\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

ein und erhalten

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left\{\sin\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\sin 2\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)\right] + \cos\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\right]\right\}, \tag{95}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left\{\cos\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\sin 2\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)\right] - \sin\vartheta\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\right]\right\}. \tag{96}$$

Diese beiden Gleichungen sind übrigens auch zur Integration längs beliebiger Wege geeignet.

Nun falle wieder die Richtung ξ mit der Richtung einer Linie $p = \text{konst.}$ zusammen, d. h. es sei $\partial p/\partial \xi = 0$. Der Winkel ϑ geht dann über in den Winkel, den die Linie $p = \text{konst.}$ mit der x-Achse bildet. Wir bezeichnen ihn mit ϑ_p (es ist $\vartheta_p = \varphi + \alpha$).

Aus (95) folgt dann

$$\operatorname{tg}\vartheta_p = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(q\cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)}{-\frac{\partial}{\partial x}(q\sin 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)}. \tag{97}$$

Die Ausdrücke $q\sin 2\varphi$ und $q\cos 2\varphi$ werden aus den Isochromaten und Isoklinen bestimmt, für hinreichend viele Schnitte $x = \text{konst.}$ und $y = \text{konst.}$ aufgetragen und differentiiert. Durch Anwendung von (97) erhält man also zunächst ein Richtungsfeld der Linien konstanter Momentensumme. Bei einiger Übung können daraus die Linien $p = \text{konst.}$ als Kurvenzüge gewonnen werden. Ganz zweckmäßig wird es sein, die zu den Linien $p = \text{konst.}$ orthogonale Kurvenschar mitzuzeichnen. Die Gewinnung der Linien $p = \text{konst.}$ aus den Richtungswinkeln gleicht etwa der Konstruktion der Trajektorien der Hauptbiegungsmomente aus den Isoklinen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn zunächst die Linien $\vartheta_p = \text{konst.}$ aufgezeichnet werden.

Für solche Linien $p = \text{konst.}$, für die eine Normierung durch die Randwerte nicht möglich ist, die also nicht auf den Rand stoßen, ergibt sich eine Festlegung des Zahlenwertes aus (96). Diese Gleichung stellt nämlich jetzt den Gradienten von p dar, den wir mit $\partial p/\partial s_4$ bezeichnet haben. Beträgt der Abstand zweier Linien $p = \text{konst.}$ Δs_4, dann folgt für die Zunahme Δp von der einen Linie bis zur nächsten aus (96):

$$\Delta p = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left\{\cos\vartheta_p\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\sin 2\varphi) - \frac{\partial}{\partial y}(q\cos 2\varphi)\right] - \sin\vartheta_p\left[\frac{\partial}{\partial x}(q\cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\right]\right\}\Delta s_4. \tag{98}$$

Am einfachsten dürfte es aber sein, zur Normierung der Linien $p = \text{konst.}$ die Momentensumme durch Integration längs eines geradlinigen Weges parallel zu einer Koordinatenachse, der möglichst alle Linien $p = \text{konst.}$ schneidet, zu bestimmen. Ein zweiter Integrationsweg kann zur Kontrolle dienen. Für diese Bestimmung sind die Gleichungen (22) und (23) in Verbindung mit (24) und (25) oder aber — was dasselbe bedeutet — die Gleichungen (93) geeignet. Aus der zweiten Gleichung (93) erhält man durch Integration vom Randpunkt P_0' bis zum Punkte P

$$(p)_P = \frac{1+\mu}{1-\mu}\left[\int_{P_0'}^{P}\frac{\partial}{\partial y}(q\sin 2\varphi)\,dx + (q\cos 2\varphi)_P\right] + \left[p - \frac{1+\mu}{1-\mu}(q\cos 2\varphi)\right]_{P_0'}. \tag{99}$$

Die Integrationskonstante

$$C = \left[p - \frac{1+\mu}{1-\mu}(q \cos 2\varphi)\right]_{P_0'} \tag{100}$$

verschwindet an einem frei drehbar aufliegenden und an einem eingespannten Rande. An einem freien Rande wird

$$C = -\frac{2}{1-\mu} q \,. \tag{101}$$

Das eben beschriebene Verfahren ist anscheinend auch bei Scheiben zur Konstruktion der Linien konstanter Spannungssumme noch wenig angewendet worden. Die dazu erforderlichen Beziehungen lassen sich analog wie hier — ausgehend von den Gleichgewichtsbeziehungen des ebenen Spannungszustandes — ableiten. Man erhält für den Winkel ϑ_p, den die Linie konstanter Spannungssumme mit der x-Achse bildet, wieder (97), worin hierbei p die Spannungssumme $\sigma_1 + \sigma_2$ und q die Hauptspannungsdifferenz $\sigma_1 - \sigma_2$ bedeuten. Für den Gradienten von p ergibt sich bei Scheiben

$$\frac{\partial p}{\partial s_4} = \cos \vartheta_p \left[\frac{\partial}{\partial y}(q \cos 2\varphi) - \frac{\partial}{\partial x}(q \sin 2\varphi)\right] + \sin \vartheta_p \left[\frac{\partial}{\partial x}(q \cos 2\varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(q \sin 2\varphi)\right] \tag{102}$$

mit der eben angegebenen Bedeutung von p und q. Hierbei bedeutet φ den Winkel zwischen der Richtung der Hauptspannung σ_1 und der x-Achse.

12. Zusammenfassung. Es sollte gezeigt werden, daß sich bei der spannungsoptischen Untersuchung elastischer Platten, die innerhalb der *Kirchhoff*schen Bedingungen auf Biegung beansprucht werden, eine ganze Reihe von Auswertemöglichkeiten ableiten lassen, die es gestatten, die Biegungsmomente einzeln zu bestimmen. Um spannungsoptische Bilder zu bekommen, ist es erforderlich, die Modellplatte aus zwei Schichten verschiedenen Materials zusammenzukleben (Zweischichtenverfahren) oder in der Plattenmittelfläche eine reflektierende Schicht anzubringen (Reflexionsverfahren). Die Meßgrößen sind die Differenz der Hauptbiegungsmomente und deren Richtungen. So wie man bei Scheibenauswertungen je nach dem vorliegenden Versuchsobjekt das eine oder das andere Auswerteverfahren bevorzugen wird, so hat man auch bei Platten die gleiche Auswahl an Auswerteverfahren. Einige davon wurden hier ausführlich wiedergegeben. Ausgehend von der Integration längs geradliniger Wege wurde die Bestimmung der Momentensumme durch Integration längs beliebiger Wege beschrieben, woraus sich wiederum eine Reihe von speziellen Methoden herleiten ließ. Dazu gehört zunächst die Integration längs einer Hauptbiegungsmomentenlinie, die sich im Falle rotationssymmetrisch belasteter Kreisplatten als besonders zweckmäßig erweist, und die Integration längs einer Haupttorsionsmomentenlinie. Weiterhin wurde eine Möglichkeit zur Bestimmung der Momentensumme beschrieben, die sich an ein von *Föppl* für Scheiben angegebenes Verfahren anlehnt, sowie ein von *Neuber* für Scheiben entwickeltes graphisches Verfahren zur Konstruktion der Linien konstanter Momentensumme bei Platten erweitert. Zum Schluß wurden noch weitere Beziehungen angegeben, mit deren Hilfe sich die Richtungen der Linien konstanter Momentensumme errechnen lassen.

Der Verfasser dankt dem Leiter des Spannungsoptischen Laboratoriums, Herrn Dr. *H. Schwieger*, für fruchtbare Diskussionen.

(Eingegangen am 22. Juni 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Phys. *Gotthard Haberland*, Deutsche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Institut für Angewandte Mathematik und Mechanik (Direktor Prof. Dr. *K. Schröder*), Spannungsoptisches Laboratorium, Erkner bei Berlin, Flakenstraße 28—31.

Zur Inversion ebener Spannungszustände

Von H.-J. Franeck

1. Einleitung. Wie *F. Levi Civita*[1] und *J. H. Michell*[2] gezeigt haben, bleibt die Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ für eine bestimmte Koordinatenbeziehung invariant. Diese Tatsache haben *A. Timpe*[3] und *W. Olszak*[4] benutzt, um mit Hilfe der Inversion neue Lösungen der Bipotentialgleichung angeben zu können. Da hierbei jedoch die Inversion in einer Abbildung innerhalb des kartesischen Koordinatensystems besteht, lassen die sich ergebenden Resultate unter Umständen keine übersichtliche Deutung zu. In der vorliegenden Arbeit wird daher die Inversion von Spannungszuständen als Folge einer Transformation der Bipotentialgleichung in spezielle krummlinige Koordinaten aufgefaßt und damit eine Vereinfachung erzielt.

2. Geometrische Grundlagen. In einer Ebene wird ein Punkt entweder durch seine rechtwinklig kartesischen Koordinaten $\bar{x}^i$ oder $\bar{x}^j$ oder $\bar{x}^k$ oder durch seine krummlinigen Koordinaten x^α oder x^β oder x^γ festgelegt. Für die Indizes i, j, k bzw. α, β, γ ist dabei jeweils 1 und 2 zu setzen. Die kartesischen Koordinaten $\bar{x}^i$ seien stetig differentiierbare Funktionen der allgemeinen Koordinaten x^α und umgekehrt.

Bezeichnet man eine partielle Differentiation mit einem kurzen senkrechten Strich

$$\frac{\partial(\,)}{\partial x^\alpha} = (\,)_{|\alpha}\,, \qquad \frac{\partial(\,)}{\partial \bar{x}^i} = (\,)_{|i}\,,$$

so erhält man die Tangenten- bzw. Gradientenvektoren

$$c^i_\alpha = \bar{x}^i{}_{|\alpha} \qquad \text{bzw.} \qquad c^\alpha_i = x^\alpha{}_{|i}$$

und daraus bei Gültigkeit des Summationsübereinkommens die Komponenten des Maßtensors in kovarianter bzw. kontravarianter Darstellung

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{ij}\, c^i_\alpha\, c^j_\beta \qquad \text{bzw.} \qquad g^{\alpha\beta} = \delta^{ij}\, c^\alpha_i\, c^\beta_j\,.$$

Die kovariante Ableitung eines Tensors wird durch einen langen senkrechten Strich gekennzeichnet und mit dem *Christoffel*schen Dreizeigersymbol $\Gamma^\alpha_{.\beta\gamma}$ für die kontravarianten Koordinaten A^α eines Vektors in der Form

$$A^\alpha|_\beta = A^\alpha{}_{|\beta} + A^\gamma\, \Gamma^\alpha_{.\gamma\beta}$$

erhalten. Die physikalischen Koordinaten eines Tensors zweiter Stufe ergeben sich aus der Relation

$$A(\alpha\beta) = \sqrt{\frac{g_{\beta\beta}}{g^{\alpha\alpha}}}\, A^{\alpha\beta}\,. \qquad \text{(nicht summieren)}$$

3. Invarianz der Bipotentialgleichung. Die Differentialgleichung $\Delta\Delta F = 0$ hat in kartesischen Koordinaten bekanntlich die Form

$$\Delta\Delta F \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial(\bar{x}^1)^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial(\bar{x}^1)^2\,\partial(\bar{x}^2)^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial(\bar{x}^2)^4} = 0 \tag{1}$$

und geht für allgemeine Koordinaten in

$$\Delta\Delta F \equiv F|^\alpha{}_\alpha{}^\beta{}_\beta \equiv g^{\alpha\beta}\, g^{\gamma\delta}\, F|_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \tag{2}$$

über. Differentiiert man (2) aus und ordnet nach den Ableitungen von F, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F \equiv F|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \equiv{}& F_{|\alpha\beta\gamma\delta}\, g^{\alpha\beta}\, g^{\gamma\delta} - F_{|\alpha\beta\gamma}\, 2\,\Gamma^\alpha_{.\lambda\delta}(g^{\lambda\delta}\, g^{\gamma\beta} + 2\, g^{\lambda\gamma}\, g^{\delta\beta}) + \\ &+ F_{|\alpha\beta}\, g^{\gamma\sigma}\,[g^{\lambda\nu}\,\Gamma^\beta_{.\gamma\sigma}\,\Gamma^\alpha_{.\lambda\nu} + g^{\alpha\beta}{}_{|\gamma\sigma} + 2\, g^{\alpha\nu}\,(2\,\Gamma^\beta_{.\nu\lambda}\,\Gamma^\lambda_{.\gamma\sigma} - \Gamma^\beta_{.\gamma\sigma|\nu})] + \\ &+ F_{|\alpha}\, g^{\gamma\sigma}\,[\Gamma^\beta_{.\gamma\sigma}(g^{\nu\lambda}\,\Gamma^\alpha_{.\nu\lambda})_{|\beta} - (g^{\nu\lambda}\,\Gamma^\alpha_{.\nu\lambda})_{|\gamma\sigma}] = 0\,.\end{aligned} \tag{3}$$

[1] *F. Levi Civita*, Sopra una trasformazione in sè stessa della equazione $\Delta\Delta = 0$, Venezia 1898 (Tip. Ferrari).
[2] *J. H. Michell*, Proc. Lond. M. Soc. 34 (1901/02), S. 134.
[3] *A. Timpe*, Z. Math. u. Phys. 52 (1905), S. 348.
[4] *W. Olszak*, Ing.-Archiv VI (1935), S. 402.

Um nun die Bedingungsgleichungen für die Invarianz der Bipotentialgleichung (1) zu bestimmen, wird der Differentialausdruck

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}(\Phi F)_{|\alpha\alpha\beta\beta} \equiv (\Phi F)_{|1111} + 2(\Phi F)_{|1122} + (\Phi F)_{|2222} \tag{4}$$

angesetzt, der formal das gleiche Aussehen wie (1) hat. Φ ist dabei eine Funktion der krummlinigen Koordinaten x^1 und x^2. Der Ausdruck (4) lautet dann ausgeschrieben

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}(\Phi F)_{|\alpha\alpha\beta\beta} \equiv {} & (F_{|1111} + 2F_{|1122} + F_{|2222})\Phi + \\ & + F_{|111}\,4\Phi_{|1} + F_{|112}\,4\Phi_{|2} + F_{|122}\,4\Phi_{|1} + F_{|222}\,4\Phi_{|2} + \\ & + F_{|11}\,2(3\Phi_{|11} + \Phi_{|22}) + F_{|12}\,8\Phi_{|12} + F_{|22}\,2(\Phi_{|11} + 3\Phi_{|22}) + \\ & + F_{|1}\,4(\Phi_{|11} + \Phi_{|22})_{|1} + F_{|2}\,4(\Phi_{|11} + \Phi_{|22})_{|2} + \\ & + F(\Phi_{|1111} + 2\Phi_{|1122} + \Phi_{|2222})\,.\end{aligned} \tag{5}$$

Aus (5) kann die Summe

$$F_{|1111} + 2F_{|1122} + F_{|2222}$$

berechnet und in (3) eingesetzt werden, wenn man sich bei der Wahl der allgemeinen Koordinaten auf solche beschränkt, die orthogonal sind ($g_{12} = 0$) und darüber hinaus der Gleichung

$$g_{11} = g_{22} = \sqrt{g} \tag{6}$$

genügen. Man erhält dann aus (3)

$$\begin{aligned}\Delta\Delta F \equiv F|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{g}\Bigg[& \frac{1}{\Phi}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}(\Phi F)_{|\alpha\alpha\beta\beta} - \\ & - 2F_{|111}\left(\frac{\sqrt{g}_{|1}}{\sqrt{g}} + 2\frac{\Phi_{|1}}{\Phi}\right) - 2F_{|112}\left(\frac{\sqrt{g}_{|2}}{\sqrt{g}} + 2\frac{\Phi_{|2}}{\Phi}\right) - \\ & - 2F_{|122}\left(\frac{\sqrt{g}_{|1}}{\sqrt{g}} + 2\frac{\Phi_{|1}}{\Phi}\right) - 2F_{|222}\left(\frac{\sqrt{g}_{|2}}{\sqrt{g}} + 2\frac{\Phi_{|2}}{\Phi}\right) + \\ & + F_{|11}\left\{\frac{1}{g}\left[2(\sqrt{g}_{|1})^2 + 2(\sqrt{g}_{|2})^2 - \sqrt{g}(\sqrt{g}_{|11} + \sqrt{g}_{|22})\right] - 2\frac{3\Phi_{|11} + \Phi_{|22}}{\Phi}\right\} + \\ & + F_{|22}\left\{\frac{1}{g}\left[2(\sqrt{g}_{|1})^2 + 2(\sqrt{g}_{|2})^2 - \sqrt{g}(\sqrt{g}_{|11} + \sqrt{g}_{|22})\right] - 2\frac{\Phi_{|11} + 3\Phi_{|22}}{\Phi}\right\} - \\ & - F_{|12}\,8\frac{\Phi_{|12}}{\Phi} - F_{|1}\,4\frac{(\Phi_{|11} + \Phi_{|22})_{|1}}{\Phi} - F_{|2}\,4\frac{(\Phi_{|11} + \Phi_{|22})_{|2}}{\Phi} - \\ & - F\frac{\Phi_{|1111} + 2\Phi_{|1122} + \Phi_{|2222}}{\Phi}\Bigg] = 0\,,\end{aligned}$$

und für die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\Phi_{|1}}{\Phi} &= -\frac{\sqrt{g}_{|1}}{\sqrt{g}}\,, \qquad 2\frac{\Phi_{|2}}{\Phi} = -\frac{\sqrt{g}_{|2}}{\sqrt{g}}\,, \\ 2\frac{3\Phi_{|11} + \Phi_{|22}}{\Phi} &= 2\frac{\Phi_{|11} + 3\Phi_{|22}}{\Phi} = \frac{1}{g}\left[2(\sqrt{g}_{|1})^2 + 2(\sqrt{g}_{|2})^2 - \sqrt{g}(\sqrt{g}_{|11} + \sqrt{g}_{|22})\right], \\ \Phi_{|12} &= \Phi_{|111} = \Phi_{|222} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

geht die Bipotentialgleichung für allgemeine Koordinaten in

$$\Delta\Delta F \equiv F|^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \equiv \frac{1}{g\Phi}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\beta=1}^{2}(\Phi F)_{|\alpha\alpha\beta\beta} = 0 \tag{8}$$

über. Die Beziehungen (7) liefern dann nur eine Lösung für die Funktion Φ, wenn die orthogonalen krummlinigen Koordinaten neben der Bedingung (6) die drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 5(\sqrt{g}_{|1})^2 - (\sqrt{g}_{|2})^2 - 4\sqrt{g}\sqrt{g}_{|11} &= 0\,, \\ 5(\sqrt{g}_{|2})^2 - (\sqrt{g}_{|1})^2 - 4\sqrt{g}\sqrt{g}_{|22} &= 0\,, \\ 3\sqrt{g}_{|1}\sqrt{g}_{|2} - 2\sqrt{g}\sqrt{g}_{|12} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

identisch erfüllen. Setzt man zur Abkürzung

$$\overset{*}{F} = \Phi F \,, \tag{10}$$

so ist die Bipotentialgleichung (3) für die den Bedingungen (6) und (9) genügenden orthogonalen Koordinaten mit der Differentialgleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \overset{*}{F}_{|\alpha\alpha\beta\beta} = 0 \tag{11}$$

identisch. Man erhält somit Lösungen von (3), wenn man in Spannungsfunktionen $\overset{*}{F}$, die der Bipotentialgleichung

$$\Delta\Delta \overset{*}{F} \equiv \frac{\partial^4 \overset{*}{F}}{\partial(x^1)^4} + 2\,\frac{\partial^4 \overset{*}{F}}{\partial(x^1)^2\,\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^4 \overset{*}{F}}{\partial(x^2)^4} = 0$$

genügen, die kartesischen Koordinaten $\bar{x}^1$ und $\bar{x}^2$ durch die krummlinigen Koordinaten x^1 und x^2 ersetzt. Dieser Vorgang wird als Inversion bezeichnet. Die Spannungsfunktionen

$$F = \frac{\overset{*}{F}}{\Phi} \tag{12}$$

beschreiben dann neue Lösungen von Randwertproblemen.

4. Spannungen. Die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors werden in allgemeinen Koordinaten aus der Beziehung

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,F|_{\gamma\delta}$$

berechnet[1]. Mit den Bedingungen (6) und der Gleichung (12) erhält man daraus

$$\left.\begin{aligned}
S^{11} &= \frac{1}{2\,(\sqrt{g}\,\Phi)^3}\Big\{2\,\overset{*}{F}_{|22}\sqrt{g}\,\Phi^2 + \overset{*}{F}_{|1}\sqrt{g}_{|1}\,\Phi^2 - \overset{*}{F}_{|2}\,(4\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|2} + \sqrt{g}_{|2}\,\Phi^2) + \\
&\qquad + \overset{*}{F}\,[4\sqrt{g}(\Phi_{|2})^2 - 2\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|22} - \sqrt{g}_{|1}\,\Phi\,\Phi_{|1} + \sqrt{g}_{|2}\,\Phi\,\Phi_{|2}]\Big\}\,, \\
S^{22} &= \frac{1}{2\,(\sqrt{g}\,\Phi)^3}\Big\{2\,\overset{*}{F}_{|11}\sqrt{g}\,\Phi^2 - \overset{*}{F}_{|1}\,(4\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|1} + \sqrt{g}_{|1}\,\Phi^2) + \overset{*}{F}_{|2}\sqrt{g}_{|2}\,\Phi^2 + \\
&\qquad + \overset{*}{F}\,[4\sqrt{g}(\Phi_{|1})^2 - 2\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|11} + \sqrt{g}_{|1}\,\Phi\,\Phi_{|1} - \sqrt{g}_{|2}\,\Phi\,\Phi_{|2}]\Big\}\,, \\
S^{12} &= -\frac{1}{2\,(\sqrt{g}\,\Phi)^3}\Big\{2\,\overset{*}{F}_{|12}\sqrt{g}\,\Phi^2 - \overset{*}{F}_{|1}\,(2\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|2} + \sqrt{g}_{|2}\,\Phi^2) - \overset{*}{F}_{2|}\,(2\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|1} + \sqrt{g}_{|1}\,\Phi^2) + \\
&\qquad + \overset{*}{F}\,[2\sqrt{g}\,\Phi_{|1}\,\Phi_{|2} - 2\sqrt{g}\,\Phi\,\Phi_{|12} + \sqrt{g}_{|2}\,\Phi\,\Phi_{|1} + \sqrt{g}_{|1}\,\Phi\,\Phi_{|2}]\Big\}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Soll die auf einem Bogenelement ds der Koordinatenlinie $x^\alpha = \text{konst.}$ angreifende Kraft $dP^k_{(\alpha)}$ ermittelt werden, dann bestimmt man zunächst den Spannungsvektor $t^k_{(\alpha)}$ in kartesischen Koordinaten. Er ergibt sich zu

$$t^k_{(\alpha)} = S^{ik}\,\delta_{ij}\,n^j_{(\alpha)}\,. \tag{14}$$

Führt man hierin den für die Koordinatenlinie $x^\alpha = \text{konst.}$ normierten Normalenvektor

$$n^j_{(\alpha)} = \frac{c^j_\alpha}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}} \qquad \text{(nicht summieren)}$$

und das Transformationsgesetz

$$S^{ik} = c^i_\alpha\,c^k_\beta\,S^{\alpha\beta}$$

ein, so nimmt (14) die Form

$$t^k_{(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\gamma=1}^{2} \frac{g_{\alpha\gamma}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}\,c^k_\beta\,S^{\beta\gamma}$$

an. Mit der Scheibendicke h und dem Linienelement $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta}$ wird dann die gesuchte Kraft

$$dP^k_{(\alpha)} = h\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\gamma=1}^{2} \frac{g_{\alpha\gamma}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}}}\,c^k_\beta\,S^{\beta\gamma}\,ds\,. \tag{15}$$

[1] *A. E. Green* a. *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, Oxford (1954), S. 187.

5. Kreiskoordinaten. Die orthogonalen Kreiskoordinaten (Abb. 1) mit den geometrischen Werten

$$\bar{x}^1 = a^2 \frac{x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \qquad \bar{x}^2 = -a^2 \frac{x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2},$$

$$x^1 = a^2 \frac{\bar{x}^1}{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2}, \qquad x^2 = -a^2 \frac{\bar{x}^2}{(\bar{x}^1)^2 + (\bar{x}^2)^2},$$

$$\bar{c}^1_1 = c^{\bar{2}}_{\bar{2}} = -a^2 \frac{(x^1)^2 - (x^2)^2}{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^2}, \qquad c^{\bar{2}}_{\bar{1}} = -c^{\bar{1}}_{\bar{2}} = a^2 \frac{2\,x^1 x^2}{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^2},$$

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11}} = \frac{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^2}{a^4}, \qquad \sqrt{g} = \frac{a^4}{[(x^1)^2 + (x^2)^2]^2}$$

erfüllen die Gleichungen (6), (7) und (9), wenn für die Funktion Φ die Beziehung

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt[4]{g}}$$

gesetzt wird. Man erhält dann nach (13) die kontravarianten Komponenten des Spannungstensors

$$\left.\begin{aligned} S^{11} &= \frac{1}{\sqrt[4]{g^3}}\left[\overset{*}{F}_{|22} + \frac{2\sqrt{g}}{a^2}\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}_{|\alpha}\, x^\alpha\right)\right], \\ S^{22} &= \frac{1}{\sqrt[4]{g^3}}\left[\overset{*}{F}_{|11} + \frac{2\sqrt{g}}{a^2}\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}_{|\alpha}\, x^\alpha\right)\right], \\ S^{12} &= -\frac{1}{\sqrt[4]{g^3}}\,\overset{*}{F}_{|12}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

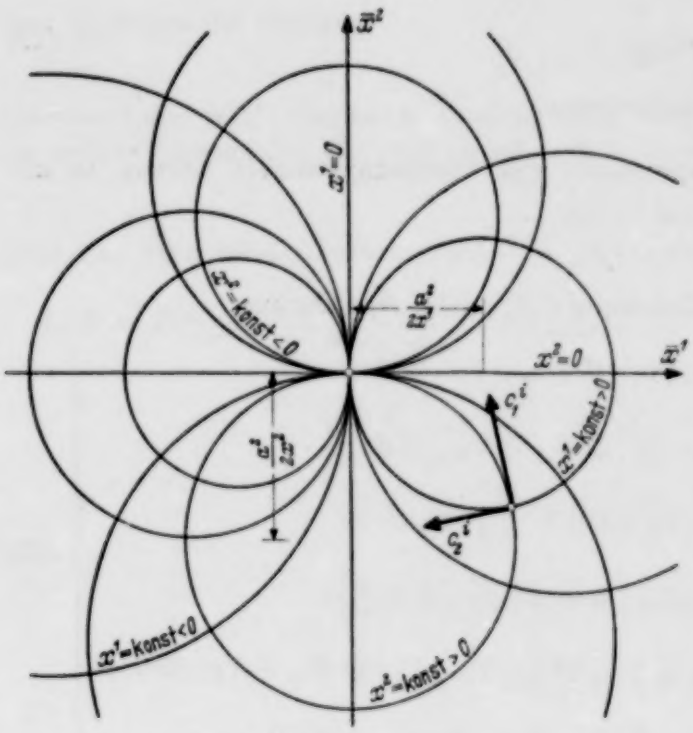

Abb. 1. Kreiskoordinaten.

Die physikalischen Koordinaten werden

$$\left.\begin{aligned} S(11) &= \frac{\overset{*}{F}_{|22}}{\sqrt[4]{g}} + \frac{2}{a^2}\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}_{|\alpha}\, x^\alpha\right), \\ S(22) &= \frac{\overset{*}{F}_{|11}}{\sqrt[4]{g}} + \frac{2}{a^2}\left(\overset{*}{F} - \overset{*}{F}_{\alpha|}\, x^\alpha\right), \\ S(12) &= -\frac{\overset{*}{F}_{|12}}{\sqrt[4]{g}}. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

6. Beispiel. Die Spannungsfunktion $\overset{*}{F}$ für eine symmetrisch zu ihren Achsen durch konstante Linienlasten beanspruchte Rechteckscheibe lautet in kartesischen Koordinaten

$$\overset{*}{F} = \overset{1}{a} + \overset{2}{a}(\bar{x}^1)^2 + \overset{3}{a}(\bar{x}^2)^2.$$

Durch Inversion in die Kreiskoordinaten ergibt sich

$$\overset{*}{F} = \overset{1}{a} + \overset{2}{a}(x^1)^2 + \overset{3}{a}(x^2)^2$$

und damit nach Einführung der neuen Konstanten $\overset{1}{a} = \overset{1}{c}$ und $\overset{2}{a} - \overset{3}{a} = \overset{2}{c}$ für die Spannungen nach (17)

$$\left.\begin{aligned} S(11) &= \frac{2}{a^2}\left[\overset{1}{c} - \overset{2}{c}(x^1)^2\right], \\ S(22) &= \frac{2}{a^2}\left[\overset{1}{c} + \overset{2}{c}(x^2)^2\right], \\ S(12) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Aus diesen Beziehungen ist ersichtlich, daß auf den Kreisen $x^1 = \text{konst.}$ bzw. $x^2 = \text{konst.}$ konstante Spannungen $S(11)$ bzw. $S(22)$ wirken und auf diese Weise der Spannungszustand von symmetrischen, durch Kreise oder Kreisbögen begrenzten Scheiben unter konstanten Randbelastungen festgelegt ist.

Da für einen Kreis mit dem Halbmesser ${}^{\nu}r$ die Größe der allgemeinen Kreiskoordinaten durch

$$x^1 = \frac{a^2}{2\,{}^{\nu}r} \qquad \text{bzw.} \qquad x^2 = \frac{a^2}{2\,{}^{\nu}r}$$

bestimmt wird, erhält man für die in Abb. 2a dargestellte Scheibe mit den Randbedingungen

$$x^2 = \frac{a^2}{2\,{}^{1}r}: \quad S(22) = {}^{1}p\,,$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2\,{}^{2}r}: \quad S(22) = {}^{2}p$$

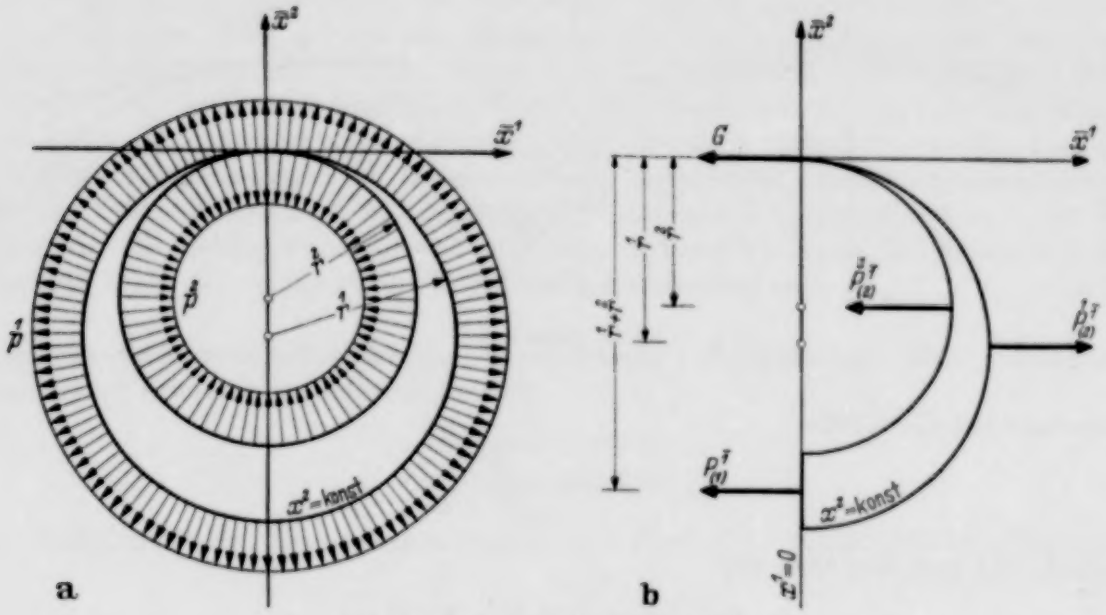

Abb. 2. Kreisscheibe mit exzentrischem Loch.

den Spannungsverlauf zu

$$\left.\begin{aligned} S(11) &= \frac{1}{{}^{1}r^2 - {}^{2}r^2}\left[{}^{1}p\,{}^{1}r^2 - {}^{2}p\,{}^{2}r^2 + 4\,({}^{1}p - {}^{2}p)\,({}^{1}r\,{}^{2}r)^2\left(\frac{x^1}{a^2}\right)^2\right], \\ S(22) &= \frac{1}{{}^{1}r^2 - {}^{2}r^2}\left[{}^{1}p\,{}^{1}r^2 - {}^{2}p\,{}^{2}r^2 - 4\,({}^{1}p - {}^{2}p)\,({}^{1}r\,{}^{2}r)^2\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right], \\ S(12) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Im Berührungspunkt der beiden Kreise wächst die Spannung $S(11)$ über alle Grenzen, doch kann gezeigt werden, daß die in diesem Punkt übertragene Längskraft G einen endlichen Wert hat. Mit den in Abb. 2b eingetragenen Resultierenden der äußeren Belastung bzw. der Spannung im Querschnitt $x^1 = 0$

$${}^{1}P^{\bar{1}}_{(2)} = 2\,{}^{1}p\,h\,{}^{1}r\,, \qquad {}^{2}P^{\bar{1}}_{(2)} = 2\,{}^{2}p\,h\,{}^{2}r\,, \qquad P^{\bar{1}}_{(1)} = \frac{2\,h}{{}^{1}r + {}^{2}r}\,({}^{1}p\,{}^{1}r^2 - {}^{2}p\,{}^{2}r^2)$$

ergibt sich die gesuchte Kraft zu

$$G = 2\,({}^{1}p - {}^{2}p)\,h\,\frac{{}^{1}r\,{}^{2}r}{{}^{1}r + {}^{2}r}\,.$$

Aus diesem Beispiel können die Ergebnisse für den in Abb. 3a dargestellten Gelenkbogen hergeleitet werden.

Für ${}^{2}p = 0$ und ${}^{1}p = -p$ werden zunächst die Spannungen nach (19)

$$\left.\begin{aligned} S(11) &= -\frac{p\,{}^{1}r^2}{{}^{1}r^2 - {}^{2}r^2}\left[1 + 4\,{}^{2}r^2\left(\frac{x^1}{a^2}\right)^2\right], \\ S(22) &= -\frac{p\,{}^{1}r^2}{{}^{1}r^2 - {}^{2}r^2}\left[1 - 4\,{}^{2}r^2\left(\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right], \\ S(12) &= 0\,. \end{aligned}\right\}$$

Die Komponenten $P^k_{(2)}$ der Resultierenden $P_{(2)}$ der äußeren Belastung (Abb. 3b) erhält man mit den Grenzen

$$\overset{1}{x}{}^1 = \frac{a^2}{2\,R} \quad \text{bis} \quad \overset{2}{x}{}^1 = \infty$$

aus (15) zu

$$P^{\bar{1}}_{(2)} = 2\,p\,h\,\frac{R^2\,\frac{1}{r}}{R^2 + \frac{1}{r^2}}, \qquad P^{\bar{2}}_{(2)} = 2\,p\,h\,\frac{R\,\frac{1}{r^2}}{R^2 + \frac{1}{r^2}}.$$

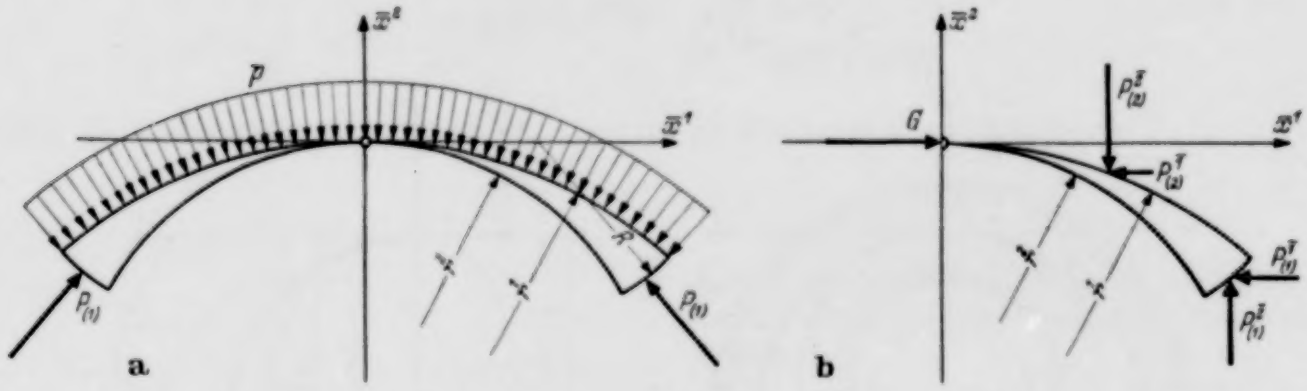

Abb. 3. Gelenkbogen.

Die Resultierende hat die Größe

$$P_{(2)} = 2\,p\,h\,\frac{R\,\frac{1}{r}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{r^2}}}.$$

Analog ergeben sich mit den Grenzen

$$\overset{1}{x}{}^2 = \frac{a^2}{2\,\frac{1}{r}} \quad \text{bis} \quad \overset{2}{x}{}^2 = \frac{a^2}{2\,\frac{2}{r}}$$

für die Komponenten $P^k_{(1)}$ der resultierenden Stützkraft $P_{(1)}$

$$P^{\bar{1}}_{(1)} = 2\,p\,h\,\frac{\frac{1}{r^2}}{R^2 + \frac{1}{r^2}}\,\frac{\frac{1}{r}\,\frac{2}{r} - R^2}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r}}, \qquad P^{\bar{2}}_{(1)} = 2\,p\,h\,\frac{R\,\frac{1}{r^2}}{R^2 + \frac{1}{r^2}}.$$

Die Resultierende wird

$$P_{(1)} = 2\,p\,h\,\frac{\frac{1}{r^2}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r}}\,\sqrt{\frac{R^2 + \frac{2}{r^2}}{R^2 + \frac{1}{r^2}}}.$$

Damit folgt für die Gelenkkraft G aus Gleichgewichtsgründen

$$G = 2\,p\,h\,\frac{\frac{1}{r}\,\frac{2}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{2}{r}}.$$

7. Zusammenfassung. Die homogene Bipotentialgleichung für eine Spannungsfunktion F wird in allgemeinen Koordinaten angeschrieben. Es läßt sich zeigen, daß diese Gleichung unter ganz bestimmten Bedingungen formal das gleiche Aussehen wie die Bipotentialgleichung in orthogonalen kartesischen Koordinaten hat. In diesem Falle können aus bekannten Lösungen in kartesischen Koordinaten neue Ergebnisse durch Inversion erhalten werden.

(Eingegangen am 1. August 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dr. rer. nat. *Heinz-Joachim Franeck*, Dresden A 27, Am Gericht 20.

Die Scheibe mit elliptischem Kern

Von G. Kaiser

1. Einleitung. Eine unendlich ausgedehnte Scheibe konstanter Wandstärke enthalte einen durch eine Ellipse begrenzten Bereich, der mit einem Material eines anderen Elastizitätsmoduls ausgefüllt sei. An der Grenzkurve seien beide Stoffe zug-, druck- und schubfest miteinander verbunden.

In der vorliegenden Arbeit[1] wird der Spannungszustand beschrieben, den diese Steifigkeitsänderung hervorruft, wenn die Scheibe einen homogenen Grundspannungszustand unterworfen wird oder wenn sie — bei unterschiedlichen Wärmedehnungskoeffizienten von Innen- und Außenraum — einer Temperaturänderung ausgesetzt ist. Für einige einfache Grundspannungszustände werden die Maximalspannungen in Diagrammform angegeben. Dehnungsmessungen an einer Scheibe mit einer elliptischen ebenen Verstärkung bestätigen die Brauchbarkeit dieser Ergebnisse für die in der Technik häufiger anzutreffenden örtlichen Verstärkungen, bei denen also der Steifigkeitsunterschied durch die verschiedene Wandstärke hervorgerufen wird.

2. Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen in elliptischen Koordinaten. Das elliptische Koordinatensystem hängt mit dem cartesischen durch

$$x = c \cosh \alpha \cos \beta \,, \tag{1a}$$

$$y = c \sinh \alpha \sin \beta \tag{1b}$$

zusammen. Dabei ist $2c$ der Brennpunktabstand, und durch $\alpha =$ konst. sind die Ellipsen

$$\frac{x^2}{c^2 \cosh^2 \alpha} + \frac{y^2}{c^2 \sinh^2 \alpha} = 1 \,,$$

durch $\beta =$ konst. die Hyperbeln

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \beta} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \beta} = 1$$

bestimmt. Der Faktor h der Verzerrung zwischen den Elementen des cartesischen, dx und dy, und denen des elliptischen Koordinatensystems, $d\alpha$ und $d\beta$, lautet[2]

$$h^2 = \frac{2}{c^2 (\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)} \,. \tag{2}$$

Zwischen den Verschiebungen u_α und u_β, den Dehnungen ε_α, ε_β und $\varepsilon_{\alpha\beta}$, der ebenen Dehnungssumme $e' = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$ und der Drehung ω bestehen mit

$$u = \frac{u_\alpha}{h} \qquad \text{und} \qquad v = \frac{u_\beta}{h}$$

die Beziehungen

$$\varepsilon_\alpha = h^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{u}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \alpha} - \frac{v}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \beta} \,, \tag{3a}$$

$$\varepsilon_\beta = h^2 \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{v}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \beta} - \frac{u}{2} \frac{\partial h^2}{\partial \alpha} \,, \tag{3b}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (h^2 v) + \frac{\partial}{\partial \beta} (h^2 u) \,, \tag{3c}$$

$$e' = h^2 \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} \right), \tag{3d}$$

$$\omega = \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \right). \tag{3e}$$

---

[1] Gekürzte Fassung einer von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation, Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*, Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. *H. Kauderer*.

[2] *C. E. Inglis*, Transactions Institution Naval Architects 55 (1913), S. 219.

Außer den Spannungs–Dehnungs-Beziehungen des ebenen Spannungszustandes

$$\sigma_\alpha = 2G\left(\varepsilon_\alpha + \frac{\mu}{1-2\mu}e'\right), \tag{4a}$$

$$\sigma_\beta = 2G\left(\varepsilon_\beta + \frac{\mu}{1-2\mu}e'\right), \tag{4b}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = G\,\varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{4c}$$

in denen G den Schubmodul und μ die Querzahl bedeutet, werden noch die Gleichgewichtsbedingungen benötigt, die hier in der durch Dehnungssumme e' und Drehung ω ausgedrückten Form angegeben werden sollen:

$$\frac{\partial e'}{\partial x} - (1-\mu)\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = 0, \tag{5a}$$

$$\frac{\partial e'}{\partial \beta} + (1-\mu)\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \tag{5b}$$

Diese *Cauchy–Riemannschen* Differentialgleichungen sind bekanntlich von jeder Funktion der komplexen Veränderlichen $\alpha + i\beta$ erfüllt, wenn man ihren Realteil als e' und ihren Imaginärteil als $(1-\mu)\omega$ auffaßt. Ausgehend von zweckmäßigen Ansätzen für solche Funktionen lassen sich die Differentialgleichungen (3) integrieren, so daß man Verschiebungen und Spannungen in Abhängigkeit von später durch Randbedingungen zu bestimmenden Freiwerten erhält.

3. Zu beiden Achsen symmetrische Spannungszustände. Innerhalb der Grenzellipse muß die Funktion für $\alpha = \beta = 0$ (in den Brennpunkten) stetig mit stetigen Ableitungen sein. Der Ansatz

$$F(\alpha + i\beta) = C\cosh n(\alpha + i\beta), \tag{6}$$

worin C eine Konstante und n eine ganze Zahl ist, führt über Real- und Imaginärteil

$$\mathrm{Re}\,F = e' = C\cosh n\alpha\cos n\beta, \tag{7a}$$

$$\mathrm{Im}\,F = (1-\mu)\omega = C\sinh n\alpha\sin n\beta \tag{7b}$$

und die Gleichungen (2) und (3) auf das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{c^2 C}{4}\{[\cosh(n+2)\alpha + \cosh(n-2)\alpha]\cos n\beta - \cosh n\alpha\,[\cos(n+2)\beta + \cos(n-2)\beta]\}, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{c^2 C}{2(1-\mu)}\{[\sinh(n+2)\alpha + \sinh(n-2)\alpha]\sin n\beta - \sinh n\alpha\,[\sin(n+2)\beta + \sin(n-2)\beta]\}, \tag{8b}$$

dessen allgemeine Lösung mit den Abkürzungen

$$\lambda = \frac{3-\mu}{1+\mu} \qquad \text{und} \qquad A_n' = \frac{C\,c^2}{16(1-\mu)}$$

und der beliebigen Konstanten B_n' lautet

$$u = A_n'\left[\left(\frac{\lambda}{n+1} - 1\right)\sinh(n+2)\alpha\cos n\beta + \left(\frac{\lambda}{n-1} + 1\right)\sinh(n-2)\alpha\cos n\beta - \left(\frac{\lambda}{n+1} + 1\right)\sinh n\alpha\cos(n+2)\beta - \left(\frac{\lambda}{n-1} - 1\right)\sinh n\alpha\cos(n-2)\beta\right] + B_n'\sinh n\alpha\cos n\beta, \tag{9a}$$

$$v = A_n'\left[\left(\frac{\lambda}{n+1} + 1\right)\cosh(n+2)\alpha\sin n\beta + \left(\frac{\lambda}{n-1} - 1\right)\cosh(n-2)\alpha\sin n\beta - \left(\frac{\lambda}{n+1} - 1\right)\cosh n\alpha\sin(n+2)\beta - \left(\frac{\lambda}{n-1} + 1\right)\cosh n\alpha\sin(n-2)\beta\right] - B_n'\cosh n\alpha\sin n\beta. \tag{9b}$$

Einsetzen in (3) und (4) liefert nach einiger Zwischenrechnung mit den Abkürzungen

$$A_n = \frac{2G}{c^2}A_n', \qquad B_n = \frac{2G}{c^2}B_n'$$

die Spannungen

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 = \\
&= A_n\,\{(2+n)\cosh n\alpha\cos(n+4)\beta \\
&\quad - [4\cosh(n+2)\alpha + (4+2n)\cosh(n-2)\alpha]\cos(n+2)\beta \\
&\quad + [(2-n)\cosh(n+4)\alpha + 8\cosh n\alpha + (2+n)\cosh(n-4)\alpha]\cos n\beta \\
&\quad - [(4-2n)\cosh(n+2)\alpha + 4\cosh(n-2)\alpha]\cos(n-2)\beta \\
&\quad + (2-n)\cosh n\alpha\cos(n-4)\beta\} \\
&+ B_n\,\{-(n-1)\cosh n\alpha\cos(n+2)\beta \\
&\quad + [(n-1)\cosh(n+2)\alpha + (n+1)\cosh(n-2)\alpha]\cos n\beta \\
&\quad - (n+1)\cosh n\alpha\cos(n-2)\beta\}\,, \qquad (10\,a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\beta\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 = \\
&= A_n\,\{(2-n)\cosh n\alpha\cos(n+4)\beta \\
&\quad - [4\cosh(n+2)\alpha + (4-2n)\cosh(n-2)\alpha]\cos(n+2)\beta \\
&\quad + [(2+n)\cosh(n+4)\alpha + 8\cosh n\alpha + (2-n)\cosh(n-4)\alpha]\cos n\beta \\
&\quad - [(4+2n)\cosh(n+2)\alpha + 4\cosh(n-2)\alpha]\cos(n-2)\beta \\
&\quad + (2+n)\cosh n\alpha\cos(n-4)\beta\} \\
&- B_n\,\{-(n-1)\cosh n\alpha\cos(n+2)\beta \\
&\quad + [(n-1)\cosh(n+2)\alpha + (n+1)\cosh(n-2)\alpha]\cos n\beta \\
&\quad - (n+1)\cosh n\alpha\cos(n-2)\beta\}\,, \qquad (10\,b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta}\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 = \\
&= A_n\,\{-n\sinh n\alpha\sin(n+4)\beta + 2n\sinh(n-2)\alpha\sin(n+2)\beta \\
&\quad + n\,[\sinh(n+4)\alpha - \sinh(n-4)\alpha]\sin n\beta \\
&\quad - 2n\sinh(n+2)\alpha\sin(n-2)\beta + n\sinh n\alpha\sin(n-4)\beta\} \\
&+ B_n\,\{-(n-1)\sinh n\alpha\sin(n+2)\beta \\
&\quad + [(n-1]\sinh(n+2)\alpha + (n+1)\sinh(n-2)\alpha]\sin n\beta \\
&\quad - (n+1)\sinh n\alpha\sin(n-2)\beta\}\,. \qquad (10\,c)
\end{aligned}$$

Mit geraden n und beliebigen A_n und B_n stellen die Gleichungen (9) und (10) mögliche Verschiebungs- und Spannungszustände in einer Scheibe mit äußerer elliptischer Begrenzung dar.

Für eine unendlich ausgedehnte Scheibe, die im Innern durch eine Ellipse begrenzt ist, also für eine Scheibe mit elliptischem Loch, hat *Inglis** Spannungs- und Verformungszustände angegeben.

Aus diesen unendlich vielen Lösungen werden für den Innenraum (Index i) die für $n = 0$ und $n = +2$, für den Außenraum (Index a) die für $n = +1$, -1 und -3 ausgewählt und addiert. Im Kern lauten diese Anteile der bezogenen Verschiebungen und Spannungen

$$\frac{2G_i}{c^2}\,u_i = B_2\cos 2\beta\sinh 2\alpha + 2(\lambda-1)A_0\sinh 2\alpha\,, \qquad (11\,a)$$

$$\frac{2G_i}{c^2}\,v_i = \sin 2\beta\,[-2(\lambda-1)A_0 - B_2\cosh 2\alpha]\,, \qquad (11\,b)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha,i}\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 \\
&= \cos 4\beta\,[4A_0 - B_2\cosh 2\alpha] \\
&\quad + \cos 2\beta\,[-16A_0\cosh 2\alpha + (3+\cosh 4\alpha)B_2] \\
&\quad + (8+4\cosh 4\alpha)A_0 - 3B_2\cosh 2\alpha\,, \qquad (11\,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\beta,i}\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 \\
&= \cos 4\beta\,[4A_0 + B_2\cosh 2\alpha] \\
&\quad + \cos 2\beta\,[-16A_0\cosh 2\alpha - (3+\cosh 4\alpha)B_2] \\
&\quad + (8+4\cosh 4\alpha)A_0 + 3B_2\cosh 2\alpha\,, \qquad (11\,d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\alpha\beta,i}\,(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2 \\
&= B_2\sin 4\beta\sinh 2\alpha + \sin 2\beta\,[-B_2\sinh 4\alpha]\,, \qquad (11\,e)
\end{aligned}$$

* Siehe Fußnote 2 von Seite 275.

Es zeigt sich, daß sich mit den Gleichungen (11) und den von *Inglis* angegebenen Lösungen des Außenraumes alle Forderungen für die Grundspannungszustände des einachsigen Zuges parallel zur kleinen oder großen Halbachse befriedigen lassen, sowohl die Randbedingungen im Unendlichen als auch die Übergangsbedingungen an der Grenzellipse zwischen Kern und Außenraum. An der Grenzellipse $\alpha = \bar{\alpha} =$ konst. muß innen und außen Gleichheit der Verschiebungen gefordert werden, da nach Voraussetzung keine Klaffungen auftreten können, und Gleichheit der Normalspannungen im elliptischen Schnitt und der Schubspannungen, da Gleichgewicht am Element vorhanden sein muß. Diese vier Bedingungen

$$(u_i)_{\bar{\alpha}} = (u_a)_{\bar{\alpha}}\,, \tag{12a}$$

$$(v_i)_{\bar{\alpha}} = (v_a)_{\bar{\alpha}}\,, \tag{12b}$$

$$(\sigma_{\alpha,i})_{\bar{\alpha}} = (\sigma_{\alpha,a})_{\bar{\alpha}}\,, \tag{12c}$$

$$(\tau_{\alpha\beta,i})_{\bar{\alpha}} = (\tau_{\alpha\beta,\alpha})_{\bar{\alpha}} \tag{12d}$$

führen, da sie für β identisch erfüllt sein müssen, auf acht Bedingungsgleichungen:

A_0	B_{+2}	B_{-1}	A_{+1}	B_{+1}	Rechte Seite
-4	$\cosh 2\bar{\alpha}$	0	2	$e^{-2\bar{\alpha}}$	$-1 \mp e^{2\bar{\alpha}}$
$16\cosh 2\bar{\alpha}$	$-3-\cosh 4\bar{\alpha}$	0	$-8\cosh 2\bar{\alpha}$	$-(3+e^{-4\bar{\alpha}})$	$4\cosh 2\bar{\alpha} \pm e^{4\bar{\alpha}}$
$-8-4\cosh 4\bar{\alpha}$	$3\cosh 2\bar{\alpha}$	$-2\sinh 2\bar{\alpha}$	$4+2e^{-4\bar{\alpha}}$	$3e^{-2\bar{\alpha}}$	$-2-e^{4\bar{\alpha}} \mp 3e^{2\bar{\alpha}}$
0	$-\sinh 2\bar{\alpha}$	0	0	$e^{-2\bar{\alpha}}$	$\pm e^{2\bar{\alpha}}$
0	$\sinh 4\bar{\alpha}$	-2	$-4\cosh 2\bar{\alpha}$	$-(3+e^{-4\bar{\alpha}})$	$-2\cosh 2\bar{\alpha} \mp 3 \mp e^{4\bar{\alpha}}$
0	$-\sinh 2\bar{\alpha}$	0	$\varepsilon(1+\lambda)$	$\varepsilon e^{-2\bar{\alpha}}$	$\frac{1}{2}\varepsilon(1+\lambda) \pm \varepsilon e^{2\bar{\alpha}}$
$-2(\lambda-1)\sinh 2\bar{\alpha}$	0	$+\varepsilon$	$\varepsilon(1-\lambda)e^{-2\bar{\alpha}}$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon(1-\lambda)e^{2\bar{\alpha}}$
$2(\lambda-1)$	$\cosh 2\bar{\alpha}$	0	$\varepsilon(1-\lambda)$	$\varepsilon e^{-2\bar{\alpha}}$	$-\frac{1}{2}\varepsilon(1-\lambda) \mp \varepsilon e^{2\bar{\alpha}}$

(13a—h)

Dabei ist $\varepsilon = G_i/G_a$ das Verhältnis der Steifigkeiten; das $\binom{\text{obere}}{\text{untere}}$ Vorzeichen gilt für Zug parallel zur $\binom{\text{kleinen}}{\text{großen}}$ Halbachse.

Da nicht alle Gleichungen voneinander unabhängig sind, genügen die fünf Konstanten zur Erfüllung der acht Bedingungen; weitere zwei Konstanten folgen aus der Erfüllung der Randbedingungen im Unendlichen, wo die Spannungen dem Grundspannungszustand anzupassen sind. Die sieben Konstanten haben die Werte

$$A_0 = \frac{1}{N}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon(\lambda+1)\left[(\varepsilon\lambda+1)e^{2\bar{\alpha}} - (\varepsilon-1)e^{-2\bar{\alpha}}\right] \mp \varepsilon(\varepsilon-1)(\lambda+1)\right\}, \tag{14a}$$

$$B_2 = \frac{1}{N}2\varepsilon(\lambda+1)\left[(\varepsilon-1)(\lambda-1) \mp (2\varepsilon+\lambda-1)e^{2\bar{\alpha}}\right], \tag{14b}$$

$$B_{-1} = \frac{1}{N}(\varepsilon-1)(\lambda-1)\left\{-(\varepsilon\lambda+1)e^{4\bar{\alpha}} + \varepsilon(\lambda+1) + (\varepsilon-1)\left[-e^{-4\bar{\alpha}} \pm 4\sinh 2\bar{\alpha}\right]\right\}, \tag{14c}$$

$$A_{+1} = \frac{1}{N}\left[\frac{1}{2}\varepsilon(\lambda+1)^2 e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon-1)(2\varepsilon+\lambda-1)(1 \pm 2e^{2\bar{\alpha}})\sinh 2\bar{\alpha}\right], \tag{14d}$$

$$B_{+1} = \frac{1}{N}e^{2\bar{\alpha}}\left\{\varepsilon(\varepsilon-1)(\lambda+1)(\lambda-1)\,2\sinh 2\bar{\alpha} \pm \left[\varepsilon(\lambda+1)^2 - (\varepsilon-1)(2\varepsilon+\lambda-1)e^{2\bar{\alpha}}\,2\sinh 2\bar{\alpha}\right]\right\}, \tag{14e}$$

$$A_{-1} = -\frac{1}{2} \tag{14f}$$

und

$$B_{-3} = \mp 1 \tag{14g}$$

mit dem Nenner $N = (\varepsilon\lambda+1)(2\varepsilon+\lambda-1)e^{2\bar{\alpha}} - (\varepsilon-1)(2\varepsilon\lambda-\lambda+1)e^{-2\bar{\alpha}}$,

Der Spannungszustand, ausgedrückt als Vielfaches des Grundspannungszustandes des einachsigen Zuges wird durch die folgenden Gleichungen vollständig beschrieben:

Innenraum:

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty} = A_0 - \frac{B_2}{8}\left[\frac{3}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta} - \frac{\cosh 4\alpha \cos 2\beta - \cosh^2 2\alpha \cos 4\beta}{(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2}\right], \tag{15a}$$

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\infty} = 2\,A_0 - \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty}, \tag{15b}$$

$$\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\sigma_\infty} = -\frac{B_2}{4}\,\frac{\sinh 2\alpha \sin 2\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}, \tag{15c}$$

Außenraum:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty} = {} & \frac{1}{8(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \\ & \{\cos 4\beta\,[-2A_{-1} - e^{2\alpha}B_{-3} + 2A_{+1} + e^{-2\alpha}B_{+1}] \\ & + \cos 2\beta\,[8A_{-1}\cosh 2\alpha + (3+e^{4\alpha})B_{-3} - 8A_{+1}\cosh 2\alpha \\ & \qquad - (3+e^{-4\alpha})B_{+1}] \\ & - (4+2e^{4\alpha})A_{-1} - 3e^{2\alpha}B_{-3} - 2B_{-1}\sinh 2\alpha \\ & + (4+2e^{-4\alpha})A_{+1} + 3e^{-2\alpha}B_{+1}\},\end{aligned} \tag{15d}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\infty} = {} & \frac{1}{8(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \\ & \{\cos 4\beta\,[-2A_{-1} + e^{2\alpha}B_{-3} + 2A_{+1} - e^{-2\alpha}B_{+1}] \\ & + \cos 2\beta\,[8e^{2\alpha}A_{-1} - (3+e^{4\alpha})B_{-3} - 8e^{-2\alpha}A_{+1} + (3+e^{-4\alpha})B_{+1}] \\ & - (4+2e^{4\alpha})A_{-1} + 3e^{2\alpha}B_{-3} + 2B_{-1}\sinh 2\alpha \\ & + (4+2e^{-4\alpha})A_{+1} - 3e^{-2\alpha}B_{-1}\},\end{aligned} \tag{15e}$$

$$\begin{aligned}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\sigma_\infty} = {} & \frac{1}{8(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \\ & \{\sin 4\beta\,[e^{2\alpha}B_{-3} + e^{-2\alpha}B_{+1}] \\ & + \sin 2\beta\,[-4A_{-1}\cosh 2\alpha - (3+e^{4\alpha})B_{-3} - 2B_{-1} \\ & - 4A_{+1}\cosh 2\alpha - (3+e^{-4\alpha})B_{+1}]\}.\end{aligned} \tag{15f}$$

In ähnlicher Weise läßt sich der Spannungszustand in einer Scheibe angeben, deren elliptischer Kern aus einem Material mit anderer Wärmedehnungszahl α_T besteht und die einer Temperaturänderung ΔT ausgesetzt ist. Die rotationssymmetrische Temperaturverformung einer Scheibe lautet in elliptischen Koordinaten, ausgedrückt durch die bezogenen Verschiebungen,

$$u_T = \frac{c^2}{2}\alpha_T \Delta T \sinh 2\alpha, \tag{16a}$$

$$v_T = -\frac{c^2}{2}\alpha_T \Delta T \sin 2\beta. \tag{16b}$$

Im Innenraum wird der Störspannungszustand durch die Gleichungen (11) beschrieben. Aus den Randbedingungen im Unendlichen, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \tau_{\alpha\beta} = 0$, und den Übergangsbedingungen

$$u_i + u_{T,i} = u_a + u_{T,a}, \tag{17a}$$

$$v_i + v_{T,i} = v_a + v_{T,a}, \tag{17b}$$

$$\sigma_{\alpha,i} = \sigma_{\alpha,a}, \tag{17c}$$

$$\tau_{\alpha\beta,i} = \tau_{\alpha\beta,a} \tag{17d}$$

lassen sich die Konstanten errechnen:

$$A_0 = \frac{1}{2N}\left[(\varepsilon\lambda + 1)e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon - 1)e^{-2\bar{\alpha}}\right], \tag{18a}$$

$$B_2 = \frac{1}{N}2\varepsilon(\lambda + 1), \tag{18b}$$

$$A_{-1} = 0, \tag{18c}$$

$$B_{-3} = 0, \tag{18d}$$

$$B_{-1} = -\frac{1}{N}\left[(\varepsilon\lambda + 1)\, e^{4\bar{\alpha}} - \varepsilon(\lambda + 1) + (\varepsilon - 1)\, e^{-4\bar{\alpha}}\right], \tag{18e}$$

$$A_{+1} = -\frac{1}{N}(\varepsilon - 1)\left(e^{2\bar{\alpha}} - e^{-2\bar{\alpha}}\right), \tag{18f}$$

$$B_{+1} = \frac{1}{N}\varepsilon(\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}}\left(e^{2\bar{\alpha}} - e^{-2\bar{\alpha}}\right). \tag{18g}$$

Zur Beschreibung des Störspannungszustandes können die Gleichungen (15) zusammen mit den Konstanten nach (18) benutzt werden, wenn man dort σ_∞ durch die Bezugsgröße

$$\sigma_T = G_i \Delta T\,(\alpha_{T,a} - \alpha_{T,i}) \tag{19}$$

ersetzt.

4. Zu den Achsen antisymmetrischer Spannungszustand. Für reinen Schub wählt man die i-fachen komplexen Ansatzfunktionen und gelangt auf einem dem Rechengang des vorigen Abschnitts entsprechenden Wege zu den Spannungen im Innenraum

$$\frac{\sigma_\alpha}{\tau_{xy,\infty}} = \frac{D_2}{2}\,\frac{\sinh 2\alpha \sin 2\beta}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta}, \tag{20a}$$

$$\sigma_\beta = -\sigma_\alpha, \tag{20b}$$

$$\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\tau_{xy,\infty}} = \frac{D_2}{4}\,\frac{-3}{\cosh 2\alpha - \cos 2\beta} + \frac{\cosh 4\alpha \cos 2\beta - \cosh 2\alpha \cos 4\beta}{(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \tag{20c}$$

und im Außenraum

$$\frac{\sigma_\alpha}{\tau_{xy,\infty}} = \frac{1}{4(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \times \{\sin 4\beta\,[2C_1 + e^{-2\alpha} D_1 - e^{2\alpha}] + \sin 2\beta\,[-2C_1 \cosh 2\alpha - (3 + e^{-4\alpha}) D_1 + 3 + e^{4\alpha}]\}, \tag{20d}$$

$$\frac{\sigma_\beta}{\tau_{xy,\infty}} = \frac{1}{4(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \times \{\sin 4\beta\,[2C_1 - e^{-2\alpha} D_1 + e^{2\alpha}] + \sin 2\beta\,[(3 + e^{-4\alpha}) D_1 - 3 - e^{4\alpha}]\}, \tag{20e}$$

$$\frac{\tau_{\alpha\beta}}{\tau_{xy,\infty}} = \frac{1}{4(\cosh 2\alpha - \cos 2\beta)^2} \times \{\cos 4\beta\,[-e^{-2\alpha} D_1 - e^{2\alpha}] + \cos 2\beta\,[C_1 \sinh 2\alpha + (3 + e^{-4\alpha}) D_1 + 3 + e^{4\alpha}] - 3\, e^{-2\alpha} D_1 - 3\, e^{2\alpha}\} \tag{20f}$$

mit den Konstanten

$$C_0 = \frac{-\varepsilon(\varepsilon - 1)}{(\varepsilon\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon - 1)\, e^{-2\bar{\alpha}}}, \tag{21a}$$

$$D_2 = \frac{2\varepsilon(\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}}}{(\varepsilon\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon - 1)\, e^{-2\bar{\alpha}}} \tag{21b}$$

$$C_1 = \frac{-(\varepsilon - 1)\, e^{2\bar{\alpha}}\left(e^{2\bar{\alpha}} - e^{-2\bar{\alpha}}\right)}{(\varepsilon\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon - 1)\, e^{-2\bar{\alpha}}}, \tag{21c}$$

$$D_1 = \frac{e^{4\bar{\alpha}}\left[(\varepsilon - 1)\, e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon\lambda + 1)\, e^{-2\bar{\alpha}}\right]}{(\varepsilon\lambda + 1)\, e^{2\bar{\alpha}} + (\varepsilon - 1)\, e^{-2\bar{\alpha}}}. \tag{21d}$$

5. Auswertung. Mit den in den Abschnitten 3 und 4 aufgestellten Beziehungen ist es möglich den Störspannungszustand einer Scheibe zu berechnen, die im Unendlichen einem homogenen Spannungszustand unterworfen ist oder, anders formuliert, die bei gleichen Elastizitätseigenschaften von Innen- und Außenraum einem beliebigen homogenen Spannungszustand unterworfen wäre. Man hat dafür den Grundspannungszustand in seine Komponenten $\sigma_{x\infty}$, $\sigma_{y\infty}$ und $\tau_{xy\infty}$ zu zerlegen, darauf die Gleichungen (14), (15) und (20), (21) anzuwenden und die so berechneten Spannungen zu summieren. Mit $\lambda = (3 - \mu)/(1 + \mu)$ gelten diese Formeln für den ebenen Spannungszustand; für den ebenen Verzerrungszustand sind die gleichen Beziehungen gültig, jedoch ist $\lambda = 3 - 4\mu$ zu setzen.

Aus den Gleichungen (15a, b, c) läßt sich nachweisen, daß der Spannungszustand im Innenraum für einachsigen Zug homogen ist. Der mit A_0 behaftete Lösungsanteil stellt den Zustand $\sigma_x = \sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$, der mit B_2 behaftete den Zustand $\sigma_x = -\sigma_y$, $\tau_{xy} = 0$ dar. Auch unter reinem Schub stellt sich ein homogener Zustand, nämlich wieder reiner Schub, im Innenraum ein, wie sich aus (20a, b, c) herleiten läßt. Es ist damit das bemerkenswerte Ergebnis gewonnen, daß der Spannungszustand im elliptischen Innenraum immer homogen ist. Auch unter einachsigem, beliebig gerichteten Zug entsteht im elliptischen Kern ein vom Ort unabhängiger Spannungszustand, der allerdings im allgemeinen nicht mehr einachsig ist. Das Abklingen oder Anwachsen der Spannungen beschränkt sich also nur auf den Außenraum.

Erstaunlich ist, daß diese Tatsache, die natürlich auch für den Sonderfall des Kreises gilt, bei der Berechnung des kreisförmigen Kernes von *Goodier*[1] unerwähnt geblieben ist. Erst bei *Muskhelishvili*[2] und *M. Davin*[3] finden sich Hinweise darauf. Diese Homogenität ist auch nicht etwa eine Folge der hier getroffenen Annahme gleicher Querdehnungszahlen für Innen- und Außenraum, sondern gilt allgemein für homogene Grundspannungszustände.

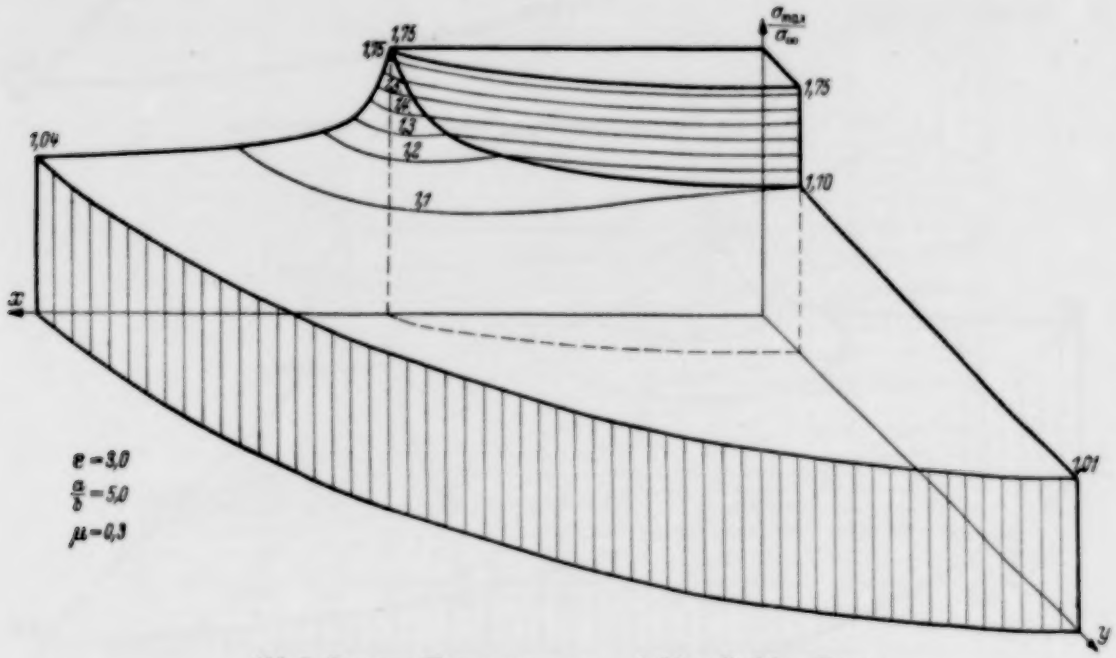

Abb. 1. Bezogene Hauptspannung σ_{max} infolge allseitigen Zuges.

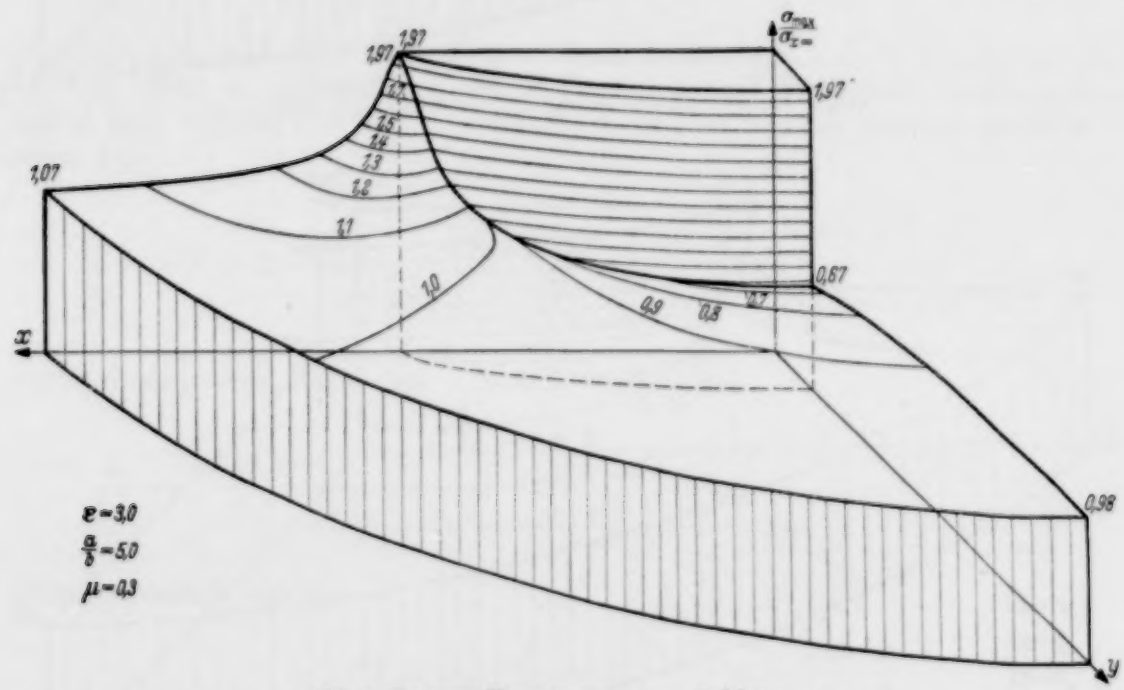

Abb. 2. Bezogene Hauptspannung σ_{max} infolge σ_x ∞.

[1] *J. N. Goodier*, J. appl. mech. 1 (1933), S. 39.
[2] *N. I. Muskhelishvili*, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Groningen 1953.
[3] *M. Davin*, Archiwum Mechaniki Stosowanej 2, XI, Warschau 1959.

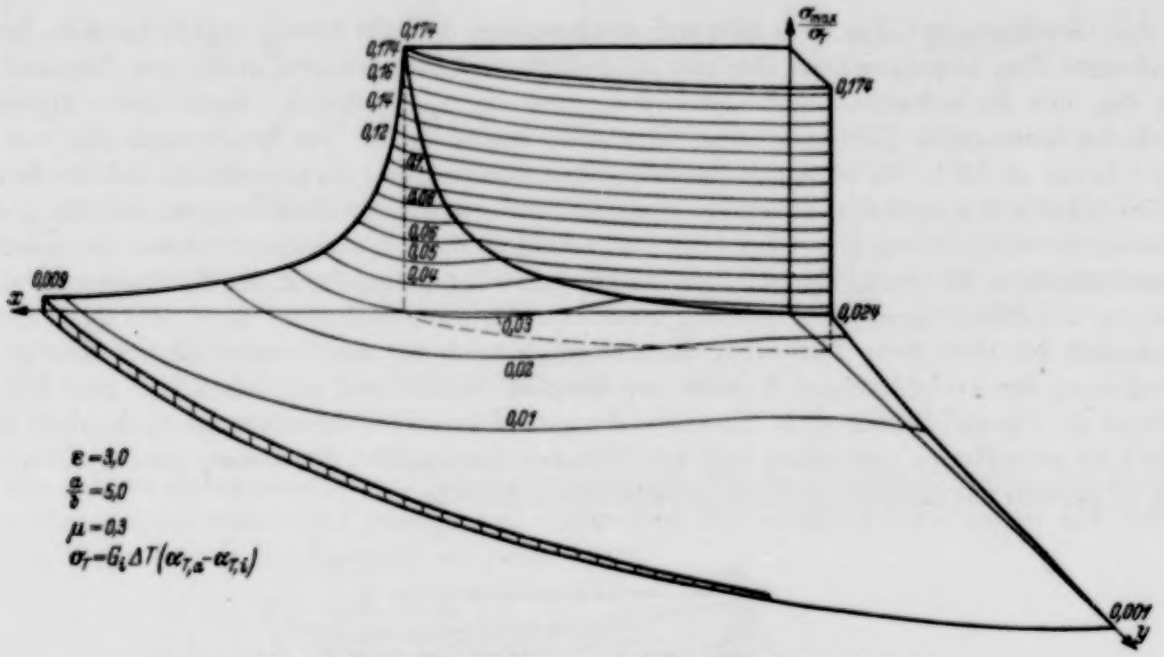

Abb. 3. Bezogene Hauptspannung σ_{max} infolge Temperaturdehnung.

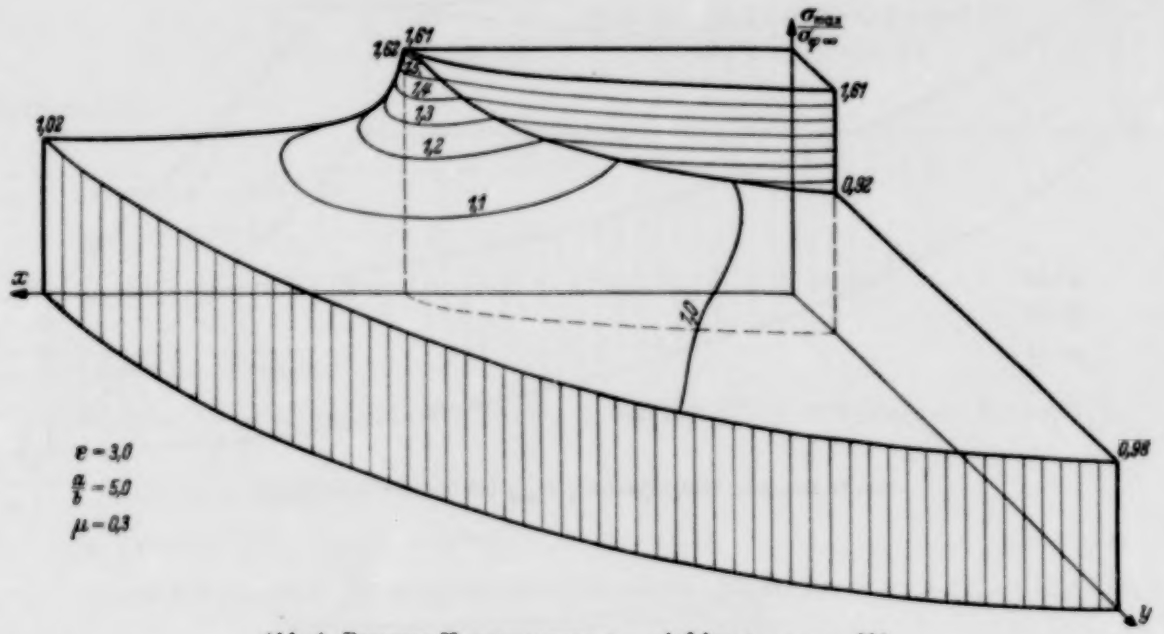

Abb. 4. Bezogene Hauptspannung σ_{max} infolge $\sigma_{\varphi\infty}$, $\varphi = 30°$.

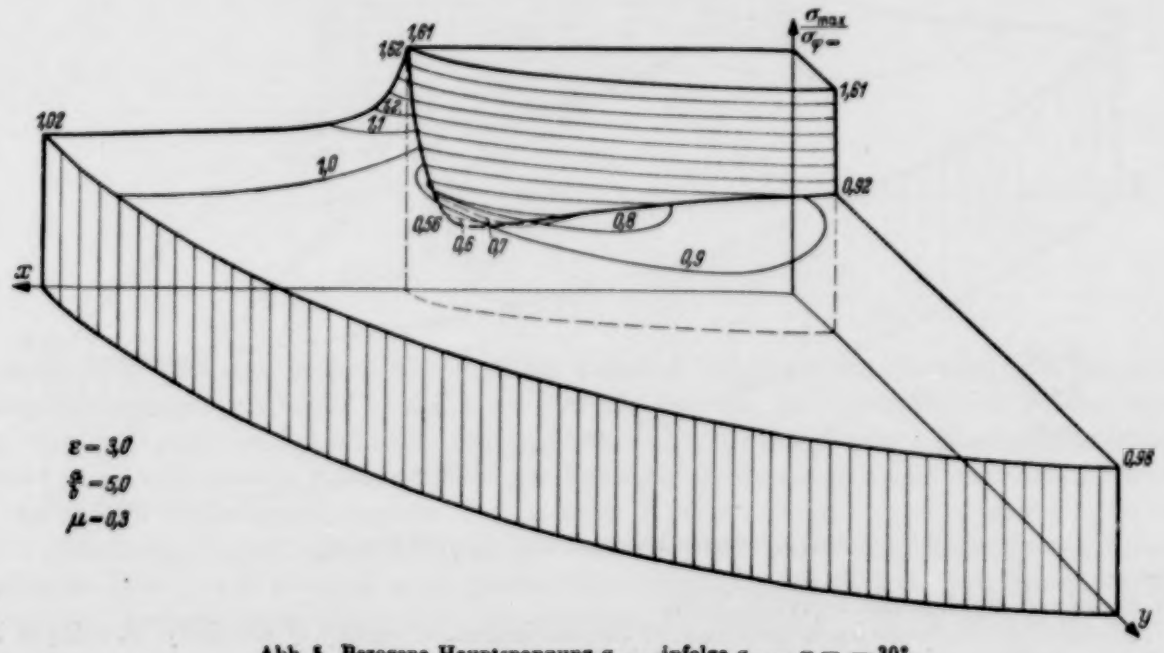

Abb. 5. Bezogene Hauptspannung σ_{max} infolge $\sigma_{\varphi\infty}$, $\varphi = -30°$.

In Abb. 1 bis 5 ist für mehrere Grundspannungszustände das Verhältnis der größeren Hauptspannung zur Bezugsspannung in Abhängigkeit vom Ort aufgetragen. Es ist stets das Halbachsenverhältnis $a/b = 5$, das Steifigkeitsverhältnis $\varepsilon = G_i/G_a = E_i/E_a = 3$ und $\mu = 0{,}3$ zugrundegelegt. Bei den drei doppelsymmetrischen Spannungszuständen allseitiger Zug, Temperaturdehnung und einachsiger Zug parallel zur großen Halbachse ist die im gesamten Kern herrschende Spannung gleich dem Größtwert der Hauptspannungen des Außenraumes. Dagegen liegt für einachsigen Zug in Richtung von 30° zur großen Halbachse die Maximalspannung nicht mehr auf der großen Halbachse und ist geringfügig größer als die Spannung des Kernes.

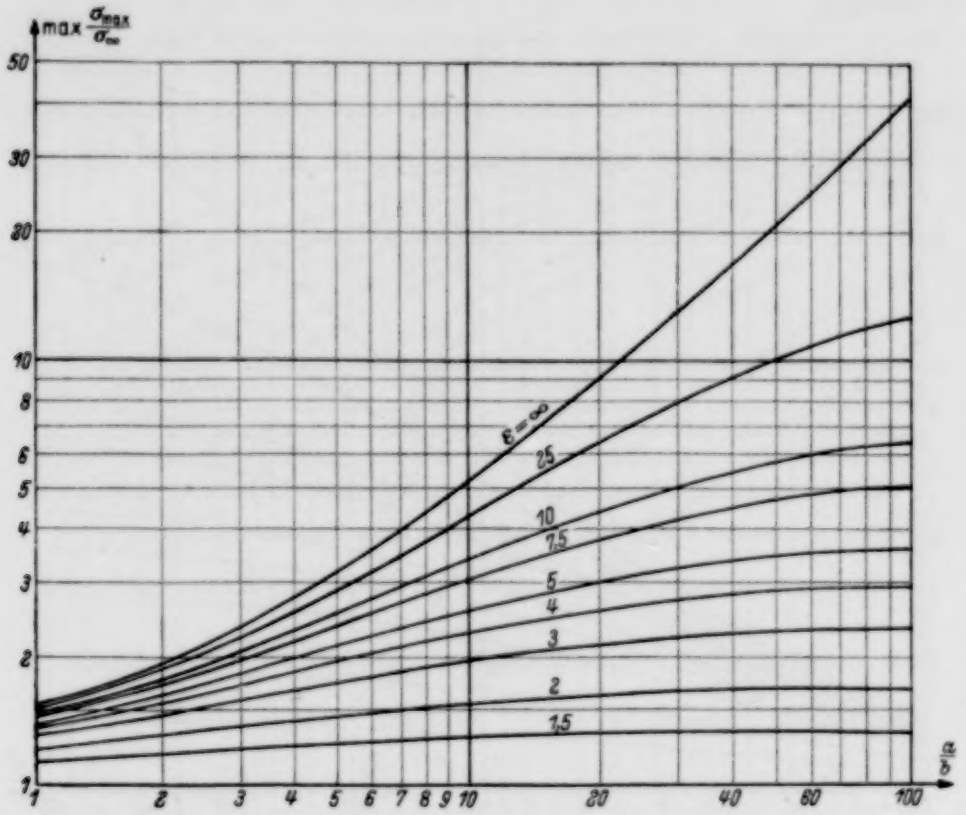

Abb. 6. Bezogene Größtspannungen infolge allseitigen Zuges in Abhängigkeit von a/b und ε. $\mu = 0{,}3$.

Für die doppelsymmetrischen Spannungszustände kann für $\varepsilon > 1$ der Größtwert der größeren Hauptspannung leicht in Abhängigkeit der Halbachsen- und Steifigkeitsverhältnisse angegeben werden, indem man in (15a) $\beta = 0$, $\alpha = \bar{\alpha}$ und $e^{2\bar{\alpha}} = (a+b)/(a-b)$ einsetzt, nämlich
für allseitigen Zug

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} = \varepsilon(\lambda+1)\,\frac{(\varepsilon\lambda+1)\dfrac{a+b}{a-b} + (\varepsilon-1)(\lambda-1) - (\varepsilon-1)\dfrac{a-b}{a+b}}{(\varepsilon\lambda+1)(2\varepsilon+\lambda-1)\dfrac{a+b}{a-b} - (\varepsilon-1)(2\varepsilon\lambda-\lambda+1)\dfrac{a-b}{a+b}}, \tag{22a}$$

für Zug parallel zur großen Halbachse

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{x\infty}} = \frac{\varepsilon(\lambda+1)}{2}\,\frac{(\varepsilon\lambda+2\varepsilon+\lambda)\dfrac{a+b}{a-b} + (\varepsilon-1)(\lambda+1) - (\varepsilon-1)\dfrac{a-b}{a+b}}{(\varepsilon\lambda+1)(2\varepsilon+\lambda-1)\dfrac{a+b}{a-b} - (\varepsilon-1)(2\varepsilon\lambda-\lambda+1)\dfrac{a-b}{a+b}} \tag{22b}$$

und für Temperaturdehnungen

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} = \frac{1}{2}\,\frac{(\varepsilon\lambda+1)\dfrac{a+b}{a-b} + \varepsilon(\lambda+1) + (\varepsilon-1)\dfrac{a-b}{a+b}}{(\varepsilon\lambda+1)(2\varepsilon+\lambda-1)\dfrac{a+b}{a-b} - (\varepsilon-1)(2\varepsilon\lambda-\lambda+1)\dfrac{a-b}{a+b}}. \tag{22c}$$

Sie sind in Diagrammform in Abb. 6, 7 und 8 aufgetragen.

Für einige Grenzfälle ergeben sich recht einfache Ausdrücke, die hier noch angegeben seien. Bei $\varepsilon = \infty$, einem starren elliptischen Kern, lauten die Achsenrandspannungen σ_a für allseitigen Zug σ_∞, Spannung auf $\binom{\text{großer}}{\text{kleiner}}$ Halbachse

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} = \frac{\lambda + 1}{4\lambda}\left[\lambda + 1 + (\lambda - 1)\binom{a/b}{b/a}\right], \tag{23a}$$

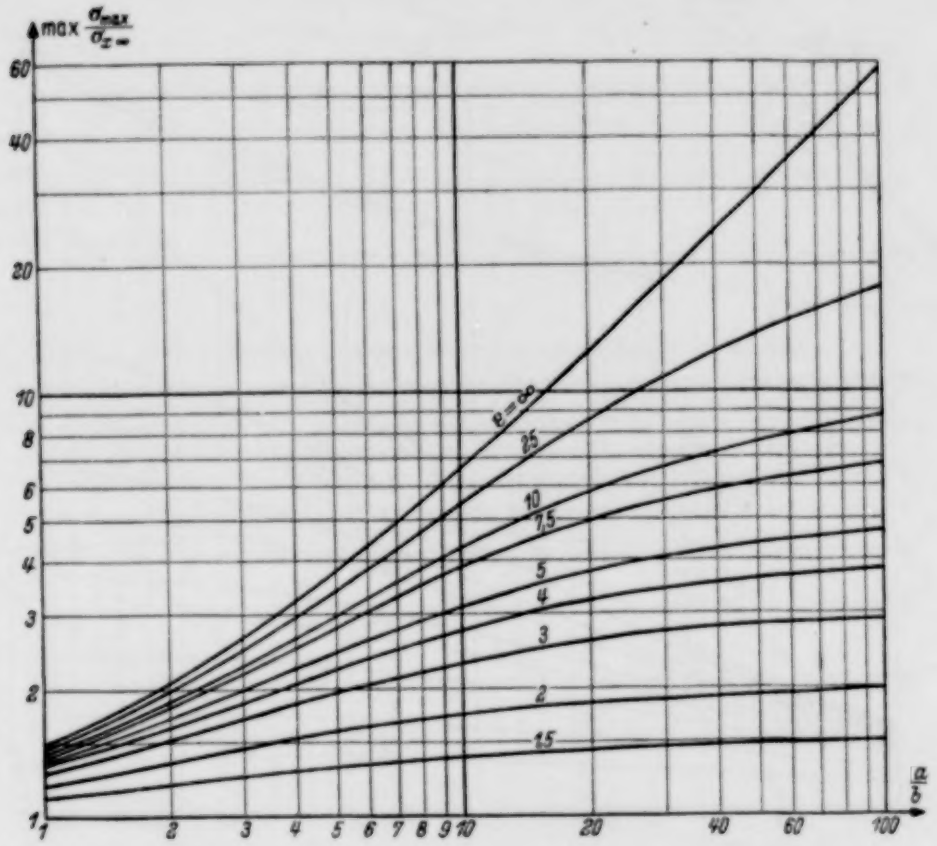

Abb. 7. Bezogene Größtspannungen infolge $\sigma_{x\infty}$ in Abhängigkeit von a/b und ε. $\mu = 0{,}3$.

für Zug σ_∞ parallel zur $\binom{\text{großen}}{\text{kleinen}}$ Halbachse, Spannung auf $\binom{\text{großer}}{\text{kleiner}}$ Halbachse

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} = \frac{\lambda + 1}{8\lambda}\left[\lambda + 3 + (\lambda + 1)\binom{a/b}{b/a}\right], \tag{23b}$$

für Zug σ_∞ parallel zur $\binom{\text{kleinen}}{\text{großen}}$ Halbachse, Spannung auf $\binom{\text{großer}}{\text{kleiner}}$ Halbachse

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} = \frac{\lambda + 1}{8\lambda}\left[\lambda - 1 + (\lambda - 3)\binom{a/b}{b/a}\right]. \tag{23c}$$

Die von *Inglis* bereits berechneten Randspannungen auf der großen Halbachse eines elliptischen Loches folgen aus (15b) durch Einsatzen von $\varepsilon = 0, \beta = 0$ und $\alpha = \bar{\alpha}$. Sie lauten für allseitigen Zug

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\infty} = 2\,\frac{a}{b}, \tag{24a}$$

für Zug parallel zur großen Halbachse

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\infty} = -1, \tag{24b}$$

für Zug parallel zur kleinen Halbachse

$$\frac{\sigma_\beta}{\sigma_\infty} = 1 + 2\,\frac{a}{b}. \tag{24c}$$

Läßt man a/b über alle Grenzen wachsen, so kommt man zu einem unendlich schmalen, einem linienförmigen Kern. Der Wert $b = 0$ liefert, in die Gleichungen (22a—c) eingesetzt, für allseitigen Zug

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty} = 2\,\varepsilon\,\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{3 - \lambda}{\lambda + 1}, \tag{25a}$$

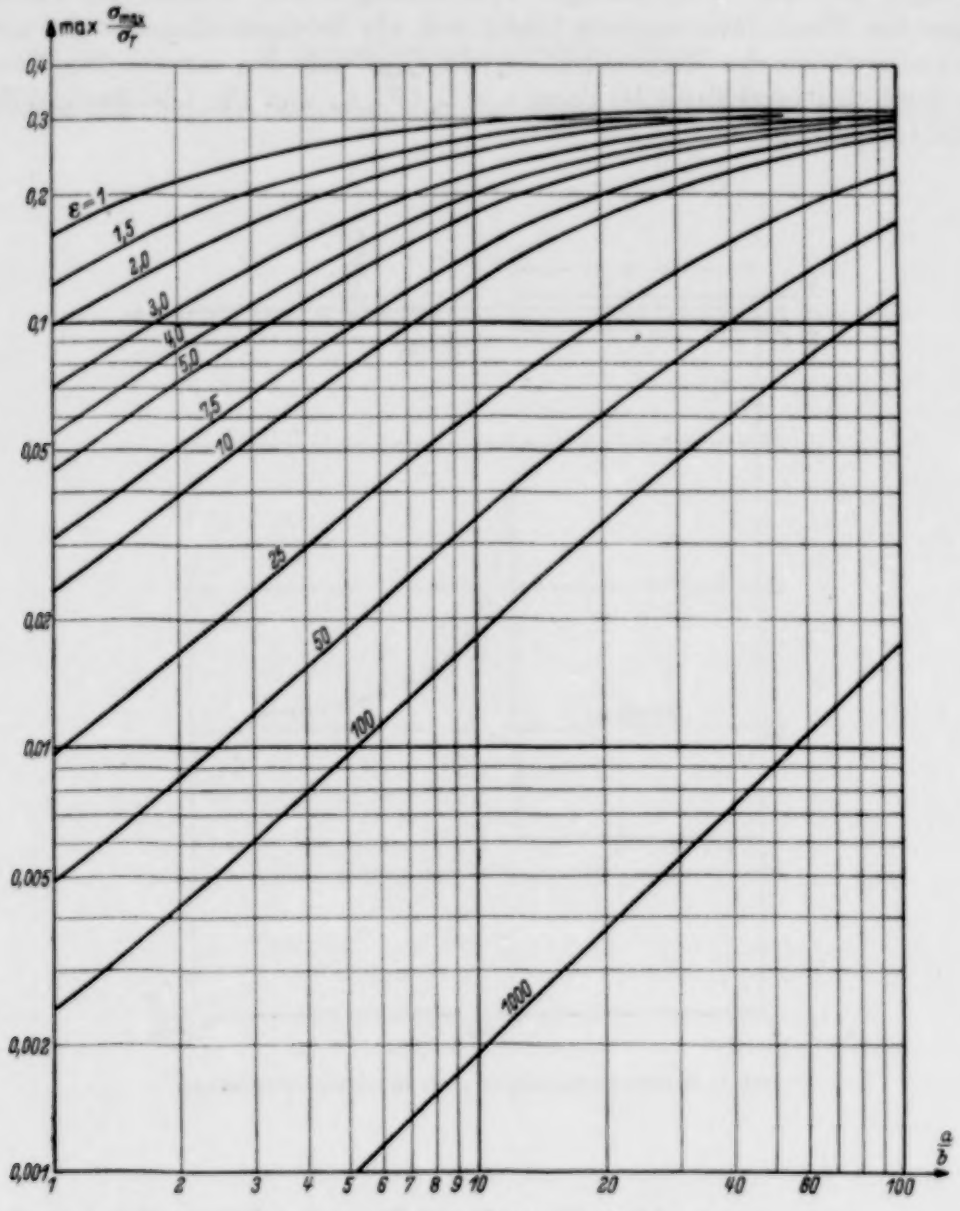

Abb. 8. Bezogene Größtspannungen infolge Temperaturdehnung in Abhängigkeit von a/b und ε. $\mu = 0{,}3$.

für Zug parallel zur großen Halbachse

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty} = \varepsilon \tag{25b}$$

und für Temperaturdehnungen

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_T} = \frac{\varepsilon - 1}{2\,\varepsilon\,(\lambda + 1)^2} + \frac{1}{\lambda + 1}. \tag{25c}$$

Die Größtspannungen für den Sonderfall des kreisförmigen Kernes betragen für allseitigen Zug

$$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\infty} = \frac{\varepsilon\,(\lambda + 1)}{2\,\varepsilon + \lambda - 1}, \tag{26a}$$

für einachsigen Zug

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_\infty} = \frac{\varepsilon(\lambda+1)(\varepsilon\lambda+2\varepsilon+\lambda)}{2(\varepsilon\lambda+1)(2\varepsilon+\lambda-1)} \tag{26b}$$

und für Temperaturdehnungen

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} = \frac{1}{2(2\varepsilon+\lambda-1)}. \tag{26c}$$

6. Dehnungsmessungen an einer elliptischen Verstärkung. In technischen Anwendungen treten Versteifungen öfter in Form laschenartiger Verstärkungen auf. Außer den dabei entstehenden Kerbspannungen am Wandstärkensprung bildet sich ein Störspannungszustand aus, der sich für nicht zu große Unterschiede der Wandstärken t_i und t_a gut mit den entwickelten Gesetzen beschreiben läßt. Das Steifigkeitsverhältnis ist dann $\varepsilon = G_i t_i / G_a t_a$, und die Gleichungen liefern statt der Spannungen die Längskräfte.

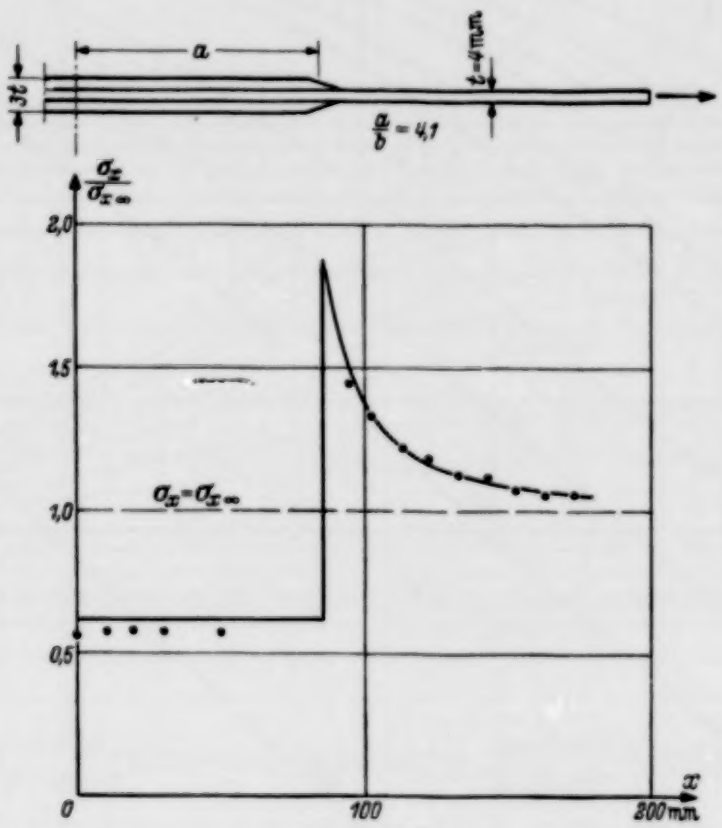

Abb. 9. Spannungserhöhung an einer elliptischen Verstärkung.

Durch Dehnungsmessungen an einem Versuchsstück aus Leichtmetallblech, auf das zwei elliptische Bleche gleicher Wandstärke aufgeschweißt waren, wurde diese Annahme bestätigt. Das Halbachsenverhältnis, bis zur Schweißnahtmitte gemessen, betrug $a/b = 4{,}1$. Nach Abbau der Eigenspannungsspitzen durch Überbelastung wurden die Dehnungen unter einachsigem Zug parallel zur großen Halbachse gemessen. Einen Vergleich der Meßpunkte mit der Rechnung zeigt Abb. 9, in der der Verlauf der Spannung σ_x längs der x-Achse dargestellt ist. Die Übereinstimmung im Außenraum ist recht gut, im Innenraum ist die auf der Oberfläche der Verstärkungen gemessene Dehnung jedoch etwa 7% geringer als die errechnete. Die Rechenvoraussetzung der konstanten Spannung über die Wandstärke trifft infolge der Elastizität der Schweißnaht und der räumlichen Spannungen hier nicht zu.

7. Schlußbemerkung. Für beliebige homogene Grundspannungszustände werden die Störspannungszustände berechnet in Scheiben, die einen durch eine Ellipse begrenzten Kern einer anderen Dehnsteifigkeit enthalten. Von dieser Lösung ausgehend läßt sich auch der Spannungszustand

angeben, der durch einen Kern mit unterschiedlichem Wärmedehnungskoeffizienten bei Temperaturänderung entsteht.

Es ergibt sich, daß unter allen homogenen Grundspannungszuständen der Spannungszustand im Kern immer homogen ist.

Aus einigen Diagrammen lassen sich die an einem elliptischen Kern auftretenden Größtspannungen für drei einfache Grundspannungszustände in Abhängigkeit von Halbachsen- und Steifigkeitsverhältnis ablesen.

Schließlich wurde noch gezeigt, daß sich die Ergebnisse auf die in der Technik anzutreffende örtliche Verstärkung einer Scheibe gut übertragen lassen.

(Eingegangen am 8. August 1960.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Ing. *Gottfried Kaiser*, Mülheim/Ruhr, Saarnberg 71.

Die Schwingungszahlen linear-elastischer Systeme

Von O. Bottema

1. Vor kurzem hat *Neuber*[1] bei linear-elastischen Punktmassensystemen gewisse Gesetzmäßigkeiten für die Frequenzen gefunden und auf die Berechnung von Frequenzschranken angewandt. Ein solches System besteht aus n Massenpunkte A_i $(i = 1, \ldots, n)$ im Raum, wo A_i die Masse m_i hat und A_i und A_j $(i \neq j)$ durch eine lineare Feder mit der Federkonstante c_{ij} $(= c_{ji})$ verbunden sind. Der grundlegende Gedanke der Untersuchung bestand darin, daß anstelle der Verschiebungen die inneren Kräfte als Unbekannte eingeführt werden. „Die zur Errechnung der Eigenfrequenzen dienende Determinante wird so wesentlich einfacher und übersichtlicher". Die Federkonstanten treten nur in den Diagonalfeldern auf, und dieser einfache Aufbau gestattet, allgemeine Gesetze für die Frequenzen aufzustellen.

Wir zeigen in der vorliegenden Notiz, daß, auch wenn man die Verschiebungen als Unbekannte beibehält, eine Frequenzdeterminante entsteht, woraus man in einfacher Weise die erste *Neuber*sche Formel ableiten kann. Daneben bemerken wir, daß diese Frequenzdeterminante im allgemeinen einen Vorzug hat vor derjenigen, die aus einer Betrachtung der inneren Kräfte entsteht. Ist das System eindimensional, so hat es n Freiheitsgrade, ein zweidimensionales hat $2n$, ein dreidimensionales $3n$ Koordinaten. Daraus geht hervor, daß die Anzahl der Frequenzen in diesen drei Fällen bzw. gleich $n-1$, $2n-3$ und $3n-6$ ist, da ja die Bewegung des Systems, als ein Ganzes betrachtet, die Freiheitsgrade eines starren Körpers aufweist. Die Frequenzdeterminante, welche aus der Betrachtung der Verschiebungen entsteht, ist dabei von der Ordnung n, bzw. $2n$ und $3n$ (und die bezügliche Gleichung hat eine einfache bzw. dreifache und sechsfache Wurzel Null). Geht man aber von den inneren Kräften aus, so entsteht eine Frequenzdeterminante, deren Ordnung der Anzahl dieser Kräfte gleich ist; diese Anzahl beträgt aber, wenn sämtliche $c_{ij} \neq 0$ sind, nicht weniger als $1/2\, n\,(n-1)$. Wir zeigen weiterhin an einem Beispiel, daß die zweite *Neuber*sche Formel in der angegebenen Fassung nicht immer zutrifft.

2. Wir betrachten vorläufig den Fall eines ebenen linear-elastischen Systems, gehen von einer Gleichgewichtslage A_i^0 aus, wobei sämtliche Federn ihre natürliche Länge haben, und wählen in der Ebene ein rechtwinkliges Koordinatenkreuz Oxy. Der Winkel des Vektors $A_i^0 A_j^0$ mit der x-Achse sei φ_{ij}; man hat $\cos\varphi_{ij} = -\cos\varphi_{ji}$, $\sin\varphi_{ij} = -\sin\varphi_{ji}$. Die kleinen Verschiebungen des Massenpunktes A_i aus seiner Gleichgewichtslage seien in der x- und y-Richtung bzw. x_i und y_i. Dann gilt für die kinetische Energie T und die potentielle Energie V des Systems

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)\,, \\ V &= \frac{1}{2}\sum_{i>j} c_{ij}\,[(x_j - x_i)\cos\varphi_{ij} + (y_j - y_i)\sin\varphi_{ij}]^2\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und die *Lagrange*schen Gleichungen für die Koordinaten x_k und y_k sind also

$$\left.\begin{aligned} m_k\ddot{x}_k + \sum_i c_{ik}\,[(x_k - x_i)\cos^2\varphi_{ik} + (y_k - y_i)\cos\varphi_{ik}\sin\varphi_{ik}] &= 0\,, \\ m_k\ddot{y}_k + \sum_i c_{ik}\,[(x_k - x_i)\cos\varphi_{ik}\sin\varphi_{ik} + (y_k - y_i)\sin^2\varphi_{ik}] &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Frequenzgleichung ist somit

$$0 = \begin{vmatrix} \sum c_{i1}\cos^2\varphi_{i1} - m_1\omega^2 & \sum c_{i1}\cos\varphi_{i1}\sin\varphi_{i1} & -c_{21}\cos^2\varphi_{21} & -c_{21}\cos\varphi_{21}\sin\varphi_{21} \\ \sum c_{i1}\cos\varphi_{i1}\sin\varphi_{i1} & \sum c_{i1}\sin^2\varphi_{i1} - m_1\omega^2 & -c_{21}\cos\varphi_{21}\sin\varphi_{21} & \cdots\cdots\cdots \\ -c_{12}\cos^2\varphi_{12} & -c_{12}\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{12} & \sum c_{i2}\cos^2\varphi_{i2} - m_2\omega^2 & \cdots\cdots\cdots \\ -c_{12}\cos\varphi_{12}\sin\varphi_{12} & -c_{12}\sin^2\varphi_{12} & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}. \tag{3}$$

[1] *H. Neuber*, Ing.-Arch. 28 (1959) S. 229.

und wir erhalten eine Gleichung $2n$-ten Grades für ω^2 mit den Wurzeln ω_λ^2. Teilt man noch die erste und zweite Zeile der Determinante durch m_1, die zwei folgenden durch m_2 usw., dann zeigt die Betrachtung der Glieder der Hauptdiagonale:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} \omega_\lambda^2 = \sum_j \frac{1}{m_j}\left(\sum_i c_{ij}\cos^2\varphi_{ij} + \sum_i c_{ij}\sin^2\varphi_{ij}\right) = \sum_{i>j} c_{ij}\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right). \tag{4}$$

Nun ist aber

$$\overline{\omega}_{ij}^2 = c_{ij}\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right) \tag{5}$$

das Frequenzquadrat des Zweimassensystems A_iA_j, das durch Herauslösen aller Federn bis auf das Verbindungselement zwischen A_i und A_j entsteht. Damit ist das eine *Neuber*sche Resultat

$$\sum \omega_\lambda^2 = \sum \overline{\omega}_{ij}^2 \tag{6}$$

gefunden. Die linke Seite hat dabei (höchstens) $2n-3$ Glieder; die Anzahl in der rechten Seite ist gleich der Anzahl der Verbindungselemente A_iA_j, d. h. höchstens $1/2\,n\,(n-1)$.

3. Für ein räumliches System erhält man analoge Resultate. Sind ϑ_{ij}, ϑ'_{ij} und ϑ''_{ij} die Winkel zwischen dem Vektor $A_i^0A_j^0$ und der x-, y- und z-Achse, dann wird die potentielle Energie des Systems

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i>j} c_{ij}\left[(x_j-x_i)\cos\vartheta_{ij} + (y_j-y_i)\cos\vartheta'_{ij} + (z_j-z_i)\cos\vartheta''_{ij}\right]^2, \tag{7}$$

und die ersten drei Zeilen der Frequenzdeterminante $3n$-ter Ordnung sehen so aus:

$$\begin{array}{llll}
\sum c_{i1}\cos^2\vartheta_{i1} - m_1\omega^2 & \sum c_{i1}\cos\vartheta_{i1}\cos\vartheta'_{i1} & \sum c_{i1}\cos\vartheta_{i1}\cos\vartheta''_{i1} & -c_{21}\cos^2\vartheta_{12}\ \ldots \\
\sum c_{i1}\cos\vartheta'_{i1}\cos\vartheta_{i1} & \sum c_{i1}\cos^2\vartheta'_{i1} - m_1\omega^2 & \sum c_{i1}\cos\vartheta'_{i1}\cos\vartheta''_{i1} & -c_{21}\cos\vartheta_{12}\cos\vartheta'_{12}\ldots \\
\sum c_{i1}\cos\vartheta''_{i1}\cos\vartheta_{i1} & \sum c_{i1}\cos\vartheta''_{i1}\cos\vartheta'_{i1} & \sum c_{i1}\cos^2\vartheta''_{i1} - m_1\omega^2 & -c_{21}\cos\vartheta_{12}\cos\vartheta''_{12}\ldots
\end{array}$$

Teilt man diese Zeilen durch m_1, die drei folgenden durch m_2 usw., betrachtet man wieder die Glieder der Hauptdiagonale, und beachtet, daß $\cos^2\vartheta_{ij} + \cos^2\vartheta'_{ij} + \cos^2\vartheta''_{ij} = 1$ ist, dann wird auch jetzt die Formel (4) gefunden.

4. Die Elemente der Frequenzdeterminante hängen in einfacher Weise mit den Komponenten des *Maxwell*schen Einflußtensors zweier Massenpunkte des Systems zusammen. Wenn man in der Gleichgewichtslage des (ebenen) Systems den Punkt A_l eine Verschiebung mit den Komponenten x_l, y_l gibt und die anderen Punkte sämtlich an ihrer Stelle bleiben, dann wird in jedem Punkt A_s eine Kraft F_{sl} hervorgerufen, deren Komponenten lineare Funktionen von x_l und y_l sind. Die Koeffizienten kann man aus (2) ablesen. Für $s \neq l$ ist die Matrix des Einflußtensors

$$M_{sl} = \begin{vmatrix} c_{ls}\cos^2\varphi_{ls} & c_{ls}\cos\varphi_{ls}\sin\varphi_{ls} \\ c_{ls}\cos\varphi_{ls}\sin\varphi_{ls} & c_{ls}\sin^2\varphi_{ls} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Der Tensor ist nur dann ungleich null, wenn $c_{ls} \neq 0$, d. h. wenn A_l und A_s durch eine Feder verbunden sind; er ist aber immer singulär und entspricht der trivialen Tatsache, daß nur eine Verschiebung von A_l in der Richtung A_sA_l eine Kraft in A_s in derselben Richtung hervorruft. Für $s = l$ aber ist die Matrix

$$M_{ll} = \begin{vmatrix} -\sum_i c_{li}\cos^2\varphi_{li} & -\sum_i c_{li}\cos\varphi_{li}\sin\varphi_{li} \\ -\sum_i c_{li}\cos\varphi_{li}\sin\varphi_{li} & -\sum_i c_{li}\sin^2\varphi_{li} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Die *Schwarz*sche Ungleichung sagt aus

$$(\sum a_i^2)\cdot(\sum b_i^2) \geqq (\sum a_i b_i)^2, \tag{10}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn die a_i den b_i proportional sind. Für

$$a_i = c_{li}^{1/2} \cos \varphi_{li}\,, \qquad b_i = c_{li}^{1/2} \sin \varphi_{li}$$

folgt daraus, daß die Determinante von (9) nur dann gleich Null ist, wenn für $c_{li} \neq 0$ gilt, daß $\operatorname{tg} \varphi_{li}$ für jedes i denselben Wert hat. Der Tensor (9) ist also nur dann singulär, wenn sämtliche mit A_l verbundenen Punkte auf einer Geraden liegen. Ist das nicht der Fall, dann hat (9) zwei negative Eigenwerte, und es gibt dann in A_l zwei senkrechte Hauptspannungsrichtungen. Ist α_l der Winkel einer dieser Richtungen mit der x-Achse, dann ist zufolge einer bekannten Formel aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte

$$\operatorname{tg} 2\alpha_l = \frac{\sum_i c_{il} \sin 2\varphi_{il}}{\sum_i c_{il} \cos 2\varphi_{il}}. \tag{11}$$

Nur wenn der Zähler und der Nenner in (11) beide gleich Null werden, sind die Hauptrichtungen unbestimmt und A_l ist ein „isotroper" Punkt.

Für den Raum gelten analoge Resultate. Der Tensor in A_l ist

$$M_{ll} = \begin{vmatrix} -\sum c_{li} \cos^2 \vartheta_{il} & -\sum c_{li} \cos \vartheta_{il} \cos \vartheta'_{il} & -\sum c_{li} \cos \vartheta_{il} \cos \vartheta''_{il} \\ -\sum c_{li} \cos \vartheta'_{il} \cos \vartheta_{il} & -\sum c_{li} \cos^2 \vartheta'_{il} & -\sum c_{li} \cos \vartheta'_{il} \cos \vartheta''_{il} \\ -\sum c_{li} \cos \vartheta''_{il} \cos \vartheta_{il} & -\sum c_{li} \cos \vartheta''_{il} \cos \vartheta'_{il} & -\sum c_{li} \cos^2 \vartheta''_{il} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Er hat den Rang eins, wenn die mit A_l verbundenen Punkte auf einer Geraden, und den Rang zwei, wenn sie in einer Ebene liegen. In jedem andern Fall hat er den Rang drei, und die Eigenwerte sind negativ. Sie bestimmen im allgemeinen in A_l die drei Hauptrichtungen.

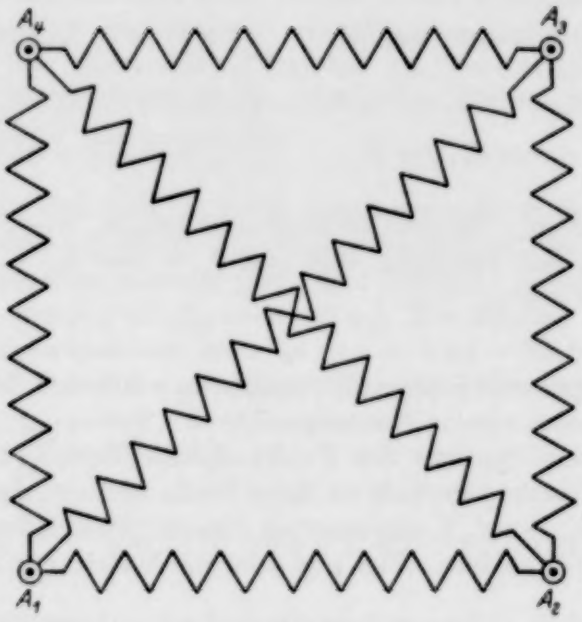

Abb. 1.

5. Wir wenden unsre Betrachtungen auf ein Beispiel an. Das System bestehe aus vier Punkten A_i, die in der Gleichgewichtslage ein Quadrat bilden. Jeder Punkt ist mit jedem anderen Punkt durch eine Feder verbunden. Die Punkte haben je die Masse m, die Feder je die Federkonstante c (Abb. 1).

Wird die x-Richtung längs A_1A_2, die y-Richtung längs A_2A_3 angenommen, dann ist

$$T = \frac{1}{2} m \sum (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)\,,$$

$$V = \frac{1}{2} c\,(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} c\,(x_3 - x_4)^2 + \frac{1}{2} c\,(y_2 - y_3)^2 + \frac{1}{2} c\,(y_1 - y_4)^2$$

$$+ \frac{1}{4} c\,(x_1 - x_3 + y_1 - y_3)^2 + \frac{1}{4} c\,(x_2 - x_4 - y_2 + y_4)^2\,,$$

und für die Frequenzgleichung findet man, wenn man $\mu = 3 - \frac{2m}{c}\omega^2$ setzt,

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & \mu & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \mu & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & \mu & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & \mu & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & \mu \end{vmatrix} = 0 \tag{13}$$

oder

$$(\mu - 3)^3 (\mu + 1)^4 (\mu + 5) = 0 . \tag{14}$$

Wir haben also, wie zu erwarten war, eine dreifache Wurzel $\omega^2 = 0$ (welche die Bewegungen des starren Systems entspricht) und weiter als wesentliche Frequenzen eine vierfache Wurzel $\omega^2 = \omega_1^2 = 2\,c/m$ und eine einfache Wurzel $\omega^2 = \omega_2^2 = 4\,c/m$. Die Amplituden der Schwingungen können jetzt berechnet werden. Ist $x_i = P_i \cos \omega t$, $y_i = Q_i \cos \omega t$, dann ist für $\omega^2 = \omega_1^2$ der Rang der Frequenzdeterminante gleich vier, und es bestehen also vier linear unabhängige Gleichungen für P_i und Q_i. Wählen wir P_1, Q_1, P_3 und Q_3 beliebig, dann hat man

$$\left.\begin{aligned} 2\,P_2 &= -P_1 + Q_1 - P_3 - Q_3 , & 2\,Q_2 &= -P_1 - Q_1 + P_3 - Q_3 , \\ 2\,P_4 &= -P_1 - Q_1 - P_3 + Q_3 , & 2\,Q_4 &= P_1 - Q_1 - P_1 - Q_3 . \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Für $\omega^2 = \omega_2^2$ hat man

$$P_1 = Q_1 = Q_2 = P_4 = -P_2 = -P_3 = -Q_3 = -Q_4 , \tag{16}$$

und damit ist die allgemeine Lösung des Schwingungsproblems gefunden.

Wir bemerken noch, daß immer

$$\sum P_i = 0 , \quad \sum Q_i = 0 \tag{17}$$

ist, was der Tatsache entspricht, daß der Schwerpunkt des Systems in Ruhe bleibt.

Aus (11) geht hervor, daß für jeden Massenpunkt die Hauptrichtungen mit den Diagonalen des Quadrats parallel sind.

6. Die zweite *Neuber*sche Formel sagt aus

$$\sum \frac{1}{\omega_\lambda^2} = \sum \frac{1}{\bar{\omega}_\lambda^2} , \tag{18}$$

wo „$\bar{\omega}_\lambda$ die Eigenfrequenzen der Ersatzsysteme kennzeichnen, die sich durch Erstarrung aller Federn bis auf die jeweils für das Zustandekommen des Schwingungsvorganges mindest erforderlichen Federn bilden lassen". In unserem Beispiel kann man, damit ein schwingungsfähiges System übrig bleibt, nicht mehr als vier Federn erstarren lassen. Es gibt also insgesamt 15 solche Ersatzsysteme, je von einem Freiheitsgrad. Wenn man aber einem Schwingungssystem Bedingungen auferlegt, dann wird immer die höchste Eigenfrequenz erniedrigt. Das heißt: für die Frequenz $\bar{\omega}_\lambda$ des Ersatzsystems gilt $\bar{\omega}_\lambda^2 < \omega_2^2 = 4\,c/m$, und man hat also

$$\sum \frac{1}{\bar{\omega}_\lambda^2} > \frac{15}{4}\frac{m}{c} .$$

Das linke Glied von (18) hat aber den Wert $4\,\frac{m}{2c} + \frac{m}{4c} = \frac{9}{4}\frac{m}{c}$.

(Eingegangen am 18. August 1960.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *O. Bottema*, Delft (Holland), Julianalaan 132.

Berichtigung

zu meiner Arbeit:

„Die Knickung der tordierten Welle mit Einzelkraft und kontinuierlicher Längskraft“ in Bd. 30, (1961), S. 42 des Ingenieur-Archivs.

Von H. Leipholz

Seite 42, Überschrift: kontinuierlicher (statt kontinuierlichen);

Gleichung (4): $\mathfrak{t} \times \mathfrak{R}$ **(statt** $\mathfrak{t} + \mathfrak{R}$**).**

Seite 43, Gleichung (5): in der dritten Gleichung $\frac{dN_\zeta}{ds}$ $\left(\text{statt } \frac{dN_\eta}{ds}\right)$.

Seite 54, Zeile 2, letztes Glied in der letzten Klammer:

$$-r_2(s)\, S_{1,}^{*,0} \qquad (\text{statt } -r_2(s)\, S_{2,}^{*,0}).$$

Seite 56, Zeile 23:

$$\int_0^l S_{2,}^{*,0}\, r_1 \sin w\, s\, ds \qquad \left(\text{statt } \int_0^l S_{2,}\, r_1 \sin w\, s\, ds\right).$$

(Eingegangen am 29. März 1961).

Anschrift des Verfassers: Dr. *Horst Leipholz*, Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51.

Vor kurzem erschien:

Praktische Mathematik

für Ingenieure und Physiker

Von Dr.-Ing. **R. Zurmühl**, Darmstadt

Dritte, verbesserte Auflage

Mit 132 Abbildungen. XVI, 548 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 29,40

INHALTSÜBERSICHT

Einführung. Hilfsmittel: Bemerkungen zum Zahlenrechnen. Zum Rechenschieber. Zur Rechenmaschine · Gleichungen: Allgemeine Gleichungen mit einer Unbekannten. Algebraische Gleichungen. Gleichungen dritten und vierten Grades. Algebraische Gleichungen höheren Grades: Verfahren von Graeffe. Stabilitätskriterien · Lineare Gleichungen und Matrizen: Der Gausssche Algorithmus. Matrizen. Die Kehrmatrix. Iterative Behandlung linearer Gleichungssysteme. Das Eigenwertproblem. Eigenwertaufgabe: Iterative Methoden · Interpolation und Integration: Allgemeine Interpolationsformeln. Spezielle Interpolationsformeln. Numerische Integration. Graphische Integration · Statistik und Ausgleichsrechnung: Verteilung der Grundgesamtheit. Die Stichprobe. Die Stichprobenverteilungen. Ausgleichsrechnung: Direkte Beobachtungen. Ausgleich vermittelnder Beobachtungen. Statistische Prüfverfahren · Darstellung willkürlicher Funktionen: Harmonische Analyse. Ausgleichsparabeln. Annäherung willkürlicher Funktionen · Differentialgleichungen: Anfangswertaufgaben: Grundgedanken. Zeichnerische Verfahren. Differenzenverfahren. Das Runge-Kutta-Verfahren. Differentialgleichungen: Rand- und Eigenwertaufgaben: Einführung. Behandlung als Anfangswertaufgabe. Differenzenverfahren. Verfahren von Rayleigh-Ritz. Verfahren der schrittweisen Näherung (Iteration) · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Operatorenrechnung

Mit Anwendungen auf technische Probleme

Von Dr. Ir. **J. P. Schouten**,

ord. Professor der theoretischen Elektrotechnik an der Technischen Hochschule

in Delft, Niederlande

Mit 128 Abbildungen. VIII, 224 Seiten Gr.-8°. 1961. Ganzleinen DM 31,50

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Begründung der Operatorenrechnung mittels Impulsfunktionen · Begründung der Operatorenrechnung mittels der Laplace-Transformation · Vorgänge beim Einschalten von Quellen mit periodischen Strömen oder Spannungen · Transversalwellen längs elektrischer Doppelleitungen · Eindeutigkeit der Transformation zum t-Bereich · Das komplexe Umkehrintegral · Weiterer Ausbau der Theorie und das Transformieren einiger spezieller Funktionen · Asymptotische Entwicklungen · Einschaltvorgänge in Kettenleitern · Einschaltvorgänge in induktionsfreien Kabeln · Eine Auswahl besonderer Probleme · Schrifttum · Verzeichnis der wichtigsten Transformationsregeln und Korrespondenzen · Namen- und Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Mit einfachen Beispielen anfangend wird die Operatorenrechnung im Geiste von Oliver Heaviside aufgebaut. Sie gibt dem Ingenieur ein wichtiges Werkzeug in die Hand, komplizierte Vorgänge in elektrischen Netzwerken oder mechanischen Systemen leicht zu übersehen und den Verlauf dieser Vorgänge beim Entwurf seiner Schaltungen oder Systeme vorauszuberechnen. Es wird dem Ingenieur gezeigt, wie die Regeln und Rechenvorschriften, die Heaviside gegeben und angewendet hat, ohne Furcht vor Fehlern benutzt werden können, wenn man sie nur passend ergänzt.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin / Göttingen / Heidelberg · Printed in Germany · V/12/6